510
N 254t

NGUYỄN CẢNH TOÀN

NÊN HỌC TOÁN THẾ NÀO CHO TỐT?

THƯ VIỆN HÀ NỘI
2013/
M136807

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn là một nhà Toán học tài năng, một nhà Giáo dục học tâm huyết, một nhà Sư phạm lớn. Tên tuổi của Ông được ghi nhận ở trong nước và trên thế giới. Ngoài những danh hiệu được Việt Nam trao tặng, Ông đã vinh dự được Trung tâm tiểu sử quốc tế đưa vào danh sách những danh nhân nổi bật của thế kỉ XXI. Ông cũng có tên trong sách ***500 người dẫn đầu thế kỉ XXI*** *của nhà xuất bản Barons Who's Who...*

*Cuốn sách "****Nên học Toán thế nào cho tốt?****" đúc kết những kinh nghiệm quý báu trong quá trình học Toán, dạy Toán, nghiên cứu Toán của ông. Tác giả đã phân tích quá trình sáng tạo toán học của mình, từ đó đúc kết thành lí luận dựa trên phương pháp tư duy biện chứng và tư duy hình tượng. Ngoài ra, tác giả còn chỉ ra những ví dụ phong phú khi đưa "Văn hóa toán học" ứng dụng vào các ngành khoa học khác cũng như áp dụng vào cuộc sống hằng ngày.*

Đây là món quà không chỉ dành cho các bạn yêu toán mà còn cho những người từng coi toán học là khô khan tìm thấy sự quyến rũ, những người coi toán học là cứng nhắc tìm thấy được sự uyển chuyển, hữu ích trong công việc của mình.

Trong cuốn sách này, những ý tưởng khi sáng tạo một bài toán, hay cách nhìn một vấn đề trong đời sống dưới con mắt toán học đều toát lên một tầm khái quát cao mang tính chất triết lí sâu sắc, từ đó bạn sẽ thấy toán học có ích hơn, gần gũi và thân thiết hơn.

Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý độc giả, để những lần xuất bản sau nội dung cuốn sách được hoàn thiện hơn.

TÁC GIẢ

MỤC LỤC

	Trang
Lời Nhà xuất bản	3
Nên học Toán như thế nào cho tốt?	7
Chương một: Học Toán để làm gì?	8
Chương hai: Học toán là học kiến thức toán học và văn hoá toán học	10
Chương ba: Dễ và khó trong học Toán	13
Chương bốn: Vậy nên học Toán như thế nào?	18
Chương năm: Muốn sáng tạo phải rất coi trọng tư duy biện chứng và tư duy hình tượng	29
Chương sáu: Một số ví dụ về nghiên cứu Toán học	49
1. Toán học ở quanh ta	49
2. Thực nghiệm toán học để tìm tòi	52
3. Hãy tập mò mẫm, dự đoán	57
4. Nên tập nhìn các khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau	59
5. Một kiểu đề toán mới	62
6. Đồng quy và không đồng quy	78
7. Trở lại vấn đề "đồng quy" và "không đồng quy"	84

8. Từ đồng quy đến thẳng hàng 89
9. Ai bảo Toán học là khô khan 94
10. Cổ học tinh hoa với toán học 96
11. Toán học và văn nghệ 98
Chương bảy: Nên sớm tập dượt nghiên cứu toán học 105
Phụ lục: Sách, báo để tham khảo thêm của tác giả Nguyễn Cảnh Toàn 108

Nên học Toán như thế nào cho tốt?

Đây là một câu hỏi khó trả lời vì sự đa dạng của trình độ và tâm lí của người học. Có người trình độ còn thấp, có người trình độ đã cao, có người yêu toán, có người ghét toán. Tuy vậy, cuốn sách này cũng có ích cho đa số độc giả quan tâm về toán, đặc biệt là các em học sinh yêu thích môn Toán, các thầy giáo dạy Toán ở các trường phổ thông. Con đường đến với toán học nhiều gian nan nhưng đầy thú vị, tác giả đã đi và đang đi. Một phần cuốn sách này kể lại một số điều thú vị tác giả đã đi trên con đường ấy, qua đó tổng hợp, đúc kết rút ra một số điều hi vọng bổ ích cho độc giả.

Chương một

Học Toán để làm gì?

Nhiều người nghĩ rằng học Toán là để có các kiến thức toán học ứng dụng trong đời sống hằng ngày và để học các môn khác, nhất là để học các môn khoa học tự nhiên và kĩ thuật. Nghĩ như vậy không sai nhưng chưa đủ. Thời đại ngày nay, trong giáo dục đào tạo, người ta yêu cầu cao về việc rèn trí thông minh sáng tạo, tính năng động thích nghi với những thay đổi nhanh đến chóng mặt, nên toán học, vốn đã được coi là "thể dục của trí não", là "nữ hoàng của các khoa học", càng phải phát huy hai vai trò đó; toán học không chỉ phải rèn trí thông minh sáng tạo để phục vụ những lĩnh vực cần đến các khái niệm, các công thức, định lí toán học mà còn rèn trí thông minh sáng tạo để phục vụ cho các lĩnh vực "phi toán", tức là những lĩnh vực không dùng đến bất cứ khái niệm, định lí, công thức toán học nào cả. Các môn học khác cũng có vai trò rèn trí thông minh sáng tạo, nhưng tác dụng không lan tỏa và sắc cạnh như tác dụng của môn Toán vì môn Toán đã loại bỏ hết mọi khía cạnh vật chất trong thế giới khách quan, chỉ giữ lại để nghiên cứu các quan hệ số lượng và các quan hệ lôgic (hình thức hoặc biện chứng). Vì toán học có thể trùm lên các khoa học nghiên cứu về các dạng vận động khác nhau nên toán học rất gần gũi với lôgic và triết học.

Nhiều người có kiến thức toán học nhưng lại ít quan tâm đến tư duy và nhân cách người làm toán.

Một lần, Vụ Phổ thông (Bộ Giáo dục cũ) chỉ đạo "bỏ chứng minh phần đảo", "bỏ biện luận" trong dạy Toán vì học sinh kêu

khó; thật là sai lầm vì "chứng minh phản đảo" nhằm mục đích rèn cho tư duy kín kẽ, "nghĩ đi rồi phải nghĩ lại", không suy nghĩ một chiều, còn "biện luận" là nhằm làm cho "chủ quan phải phù hợp với khách quan"; trong biện luận, tham số m là đại diện cho khách quan, khi m biến thiên, tức là khi khách quan biến đổi thì lời giải của bài toán (chủ quan) phải thay đổi theo. Khi biện luận phải xét cho hết mọi trường hợp có thể xảy ra đối với m, không được phiến diện bỏ sót trường hợp nào. Sau này khi học sinh vào đời, trừ những người làm nghề dạy Toán hay nghiên cứu toán học, có mấy ai phải đụng đến định lí đảo hay biện luận theo tham số nhưng ở tất cả mọi người, dù làm nghề gì cũng không được suy nghĩ một chiều, không được chủ quan, không được phiến diện. Dạy chứng minh phản đảo, dạy biện luận chính là để giáo dục những phẩm chất đó cho mọi học sinh, dù cho các em sau này ra đời làm nghề gì. Các môn khác cũng có thể giáo dục như vậy nhưng môn Toán, với ưu thế đòi hỏi chính xác cao độ và khả năng phục vụ các khoa học khác sẽ rèn luyện phẩm chất đó một cách vừa rộng rãi, vừa riết róng. Như vậy, nếu học sinh có kêu khó thì phải chỉ đạo tìm những bài toán trong đó phản đảo chứng minh không khó, những bài biện luận ít rắc rối chứ không phải là "bỏ chứng minh đảo", "bỏ biện luận". Đối với một học sinh, việc chứng minh được phản đảo của một định lí không quan trọng bằng việc nhận thức được rằng cần phải chứng minh phản đảo thì mới yên tâm với lập luận của mình, chưa chứng minh thì cảm thấy lập luận không kín kẽ.

Nói tóm lại, học Toán không chỉ nhằm để có kiến thức toán học mà còn để phát triển tư duy sáng tạo và nhân cách. Hai mặt này tác động lẫn nhau: tư duy càng sắc bén, nhân cách càng tốt đẹp thì nắm kiến thức càng sâu; nắm kiến thức càng sâu càng mài sắc tư duy và gia cố nhân cách.

Chương hai

Học Toán là học kiến thức Toán học và văn hóa Toán học

Ngày nay, ai cũng phải học suốt đời và đều bắt đầu bằng quãng đời học sinh. Trong quãng đời này, quá trình học được chia ra thành nhiều công đoạn dài, ngắn khác nhau: tiết học, tuần học, học kì, năm học, khóa học. Có thể ví một công đoạn học với một chu trình sản xuất: đầu vào gồm kiến thức đã có, đầu ra vẫn gồm những kiến thức đó được củng cố vững chắc hơn và thêm các kiến thức mới học được; tư duy là công nghệ để nối các kiến thức mới và cũ với nhau thành một chỉnh thể lôgic và sự nỗ lực phấn đấu học là năng lượng. Sự so sánh này là khập khiễng vì trong sản xuất, khi kết thúc một chu trình thì chu trình mới sẽ lặp lại y nguyên chu trình cũ khi giữa hai chu trình không có đổi mới công nghệ; còn trong học tập, công đoạn sau khác công đoạn kế trước vì đầu vào của công đoạn sau là đầu ra của công đoạn trước: kiến thức đầu vào không bị tiêu hao mà chắc thêm và giàu thêm những kiến thức mới; không những thế, trình độ tư duy, trình độ nhân cách người học cũng đã trưởng thành lên so với khi bắt đầu công đoạn trước. Sự giàu về kiến thức thì thấy rõ, nhiều khi chỉ qua một tiết học là đã có thêm kiến thức mới, còn sự trưởng thành về tư duy và nhân cách thì thường phải qua một công đoạn dài (năm học, khóa học) mới thấy rõ. Sự tích lũy ở đây có thể ví với sự tích lũy của từng

hạt cát để thành bãi phù sa. Mỗi tiết học cũng cho người học thêm một hạt cát để tư duy và nhân cách nhưng khó thấy, khó đo. Vì vậy mà khi nói đến học, người đời thường nói đến học kiến thức, rất ít người nói đến học "tư duy" và rèn "nhân cách", vô hình chung bỏ đi cái rất quan trọng mà ta đã ví với công nghệ và năng lượng trong sản xuất. Ngay các giáo viên thường cũng chỉ lo sao dạy cho hết chương trình (hoàn thành nhiệm vụ về cung cấp kiến thức), còn tư duy và nhân cách học sinh được nâng lên đến đâu qua môn mình dạy thì được chăng hay chớ. Sự coi nhẹ này còn tai hại ở chỗ nó lãng phí rất nhiều sự tác động qua lại giữa việc học các bộ môn khác nhau. Sự tác động qua lại này biểu hiện ra ở ba mức:

- Mức kiến thức: Kiến thức môn này hỗ trợ cho việc học môn khác, ví dụ như kiến thức Toán cần cho học Lí, kiến thức Địa lí cần cho học Lịch sử,...

- Mức tư duy: Kiểu tư duy môn này có thể vận dụng sang môn khác, ví dụ tư duy lôgic trong toán học cũng phục vụ cho việc bố cục một bài văn, cho việc xây dựng một cách nhất quán tính cách một nhân vật tiểu thuyết.

- Mức nhân cách: Những phẩm chất của người học hình thành nên ở môn học này cũng phục vụ tốt cho việc học các môn khác ví như, trong học Toán "ý thức đòi hỏi chính xác" được rèn dũa và điều đó cũng có ích cho việc học văn phạm của bất cứ thứ tiếng nào.

Nhờ sự tác động qua lại này ở cả ba mức độ mà hệ thống kiến thức trở thành một chỉnh thể trong đó có ba sợi dây liên kết kiến thức, tư duy và nhân cách. Hai sợi dây tư duy và nhân cách tạo nên mặt văn hóa trong từng bộ môn. Sau đây xin đề cập đến văn hóa toán học, tức là hệ thống những phẩm chất của tư duy và nhân cách hấp thụ được qua việc học toán, làm toán và bền vững

đến mức dù có quên các kiến thức toán học thì các phẩm chất đó vẫn còn.

Môn Toán có một đặc thù khiến cho nó được mệnh danh là "môn thể dục của trí não", nhưng thường người ta chỉ nghĩ đến việc rèn luyện tư duy lôgic, trong lúc toán học liên quan đến nhiều loại tư duy: lôgic, hình tượng, biện chứng, quản lí, kinh tế, kĩ thuật, thuật toán. Ngay tư duy lôgic cũng chỉ được quan tâm một cách phiến diện, chẳng hạn như rất coi nhẹ "quy nạp". Khi học một định lí, học sinh có thể hiểu được mắt xích lôgic nối giả thiết với kết luận nhưng không hiểu được người ta nghĩ thế nào mà phát minh ra định lí đó. Nguyên do là vì lâu nay ta dạy cho học sinh một "toán học" đã hình thành xong xuôi, biến học sinh thành những người tham quan một phần nào đó của lâu đài toán học chứ không đặt họ vào vị trí của những người cảm xúc, suy nghĩ, thiết kế và thi công ra phần đó của lâu đài. Muốn làm việc này thì ngoài tư duy lôgic phải huy động nhiều tư duy khác và đó cũng là cách tốt nhất để phát triển không những để phục vụ cho học toán mà còn cho việc học các môn khác và rộng ra, phục vụ cho cả cách ứng xử trong mọi tình huống của cuộc đời.

Về rèn luyện tư duy, nhân cách thì toán học có đặc thù là yêu cầu cao về tính chính xác và tính trừu tượng. Nó sẽ rèn luyện người học phẩm chất "đòi hỏi chính xác, chống đại khái, tùy tiện", "tầm nhìn xa trông rộng" do không bị hạn chế bởi những cái cụ thể trước mắt.

Phạm vi ứng dụng của kiến thức toán học, tuy đã mở rộng, nhưng vẫn còn hạn chế, còn phạm vi ứng dụng của văn hóa toán học thì rộng hơn nhiều, lan đến cả nhiều lĩnh vực phi toán, ví như phương châm "dĩ bất biến ứng vạn biến" mà trong toán học ta gặp hằng ngày (vì mỗi định lí chứa đựng một chân lí bất biến và được ứng dụng để làm rất nhiều bài tập), thì có thể ứng dụng khắp nơi trong cuộc sống.

Chương ba

Dễ và khó trong học Toán

Ở đời, ai mà chẳng có lúc phải nói: "Khó quá!", "Hơi khó đấy!" hoặc "Dễ thôi!", "Dễ ợt", v.v... khi phải giải quyết một việc gì đó có thể là chuyện "đời thường", nhưng sự đánh giá mức độ "khó, dễ" lại ảnh hưởng đến tinh thần, thái độ, hướng suy nghĩ của người phải giải quyết công việc. Mà đánh giá đâu có đơn giản: "khó" hay "dễ" thường phản ánh một cái gì chủ quan (trình độ, quan điểm, điều kiện, hoàn cảnh, v.v...) của người giải quyết công việc. "Khách quan" gắn với tính chất "tuyệt đối" nghĩa là độc lập với người giải quyết công việc, còn "chủ quan" lại gắn với tính chất "tương đối" nghĩa là phụ thuộc vào người giải quyết công việc. Sự đánh giá đúng hay sai nhiều khi còn ảnh hưởng đến chiều hướng hành động của cả một cộng đồng, trong suốt một thời gian dài. Ở đây tôi không có tham vọng bàn luận về "khó, dễ" nói chung, mà chỉ hạn chế vấn đề trong phạm vi dạy và học, thậm chí hẹp hơn nữa là dạy và học toán.

Học sinh thường hay đánh giá: "Thầy này dạy khó hiểu, thầy kia dạy dễ hiểu". "Sách này viết dễ hiểu, sách kia viết khó hiểu". "Chương này dễ, chương kia khó". "Bài toán này khó quá". "Bài toán kia dễ ợt", v.v... Đó cũng là chuyện "đời thường" của học sinh. Nhưng, với một sự nhạy cảm sư phạm, người ta sẽ thấy ngay mặt "thụ động" trong quan niệm trên đây về "dễ" và "khó": khó và dễ trong việc tiếp thu kiến thức do thầy hay sách

truyền đạt, khó và dễ trong việc làm bài do thầy ra. Điều đó có nguồn gốc sâu xa từ một kiểu dạy học còn rất phổ biến ở nước ta mà ngày nay gọi là sư phạm độc thoại, áp đặt và quyền uy. Đặc trưng của kiểu dạy này là: hầu như chỉ một mình thầy nói trên bục giảng (độc thoại) còn học trò thì nghe thụ động, thỉnh thoảng mới có một mẩu đối thoại giữa thầy và trò về một điểm nào đó trong nội dung bài giảng. Thầy nói thì trò phải nghe (áp đặt), không có tranh luận giữa thầy và trò; chỉ có thầy ra bài cho trò làm (tức là thầy nêu vấn đề cho trò giải quyết). Rất hiếm trường hợp trò tự phát hiện ra vấn đề rồi tự đặt cho mình trách nhiệm giải quyết. Trò nói sai, làm sai với ý thầy, thì rất sợ bị điểm kém, bị phạt, thậm chí bị lưu ban hay đuổi học (quyền uy). Cách dạy, cách học đó đã ăn sâu đến mức không chỉ có học sinh, mà cả một bộ phận thầy giáo cũng hình dung "khó, dễ" trong sự tiếp thu thụ động của người học. Do đó, các thầy giáo nhiều khi cũng có thái độ khác nhau trước những ý đồ cải tiến việc dạy và học: có thầy giáo muốn cho học sinh của mình thấy rằng toán học tồn tại ở khắp nơi chứ không phải chỉ có trong sách vở, trên bảng đen, trong lớp học. Do đó, không chỉ phải học toán vào lúc ngồi tại bàn, với quyển vở và cây bút, lúc đứng cạnh bảng đen với viên phấn, mà có thể học toán ở mọi nơi, mọi lúc, kể cả lúc vui chơi, khi đi đường, v.v... Vì ở đâu mà chẳng có các quan hệ lôgic, các quan hệ về số lượng và hình dạng... Để hướng dẫn học sinh đi vào con đường đó, các thầy đã kể cho học sinh nghe những mẩu chuyện về "học toán" và học "văn hóa toán" ở mọi lúc, mọi nơi của bản thân mình thời còn là học sinh. Đó là những câu chuyện vừa vui, vừa đí dỏm, gắn liền với cuộc sống đời thường. Thầy chọn những vấn đề "toán học" mà từ việc phát hiện cho đến cách tìm hướng giải quyết và cuối cùng là việc giải quyết đều không có gì phức tạp lắm, vừa sức học sinh. Thế nhưng, cũng có những người không đồng tình và chê những bài toán đó

là dễ quá. Những người này hình như chỉ xem xét có phần cuối là phần "giải quyết vấn đề" để đánh giá "khó, dễ" mà không thấy toàn bộ quá trình từ lúc "phát hiện vấn đề" đến lúc "loay hoay tìm hướng giải quyết vấn đề" và cuối cùng mới "giải quyết vấn đề". "Phát hiện vấn đề" là mở ra được một con đường. Nó rất quan trọng và việc rèn luyện được phẩm chất "nhạy bén phát hiện vấn đề" là điều cực khó trong khoa học sư phạm. Cái khó ở đây khác với cái khó trong việc giải những bài toán lắt léo. Chẳng hạn trả lời được câu hỏi: "Tại sao đứng trước một sự vật hay hiện tượng, người này lại tò mò, chú ý, người kia lại không?". Làm sao giáo dục được tính "tò mò khoa học"? Đâu dễ có được óc tò mò và sự nhạy cảm khoa học. Biết bao người đã ngâm mình trong nước tắm nhưng phải đợi đến Ác-si-mét (Archimède) với tiếng reo "Ơ-rê-ka", định luật mang tên ông mới được phát hiện. Hàng triệu người đã nhìn thấy quả táo rơi nhưng phải đợi đến Niu-tơn (Newton) mới có sự băn khoăn tự hỏi: "Tại sao quả táo rơi mà Mặt Trăng không rơi?", mở đường cho việc tìm ra định luật vạn vật hấp dẫn. Rất nhiều đứa trẻ bất lực trước việc quả bóng rơi xuống hố sâu, không làm sao lấy lên được, chỉ Lương Thế Vinh mới có nhạy cảm tìm ra hướng giải quyết là dùng sức của nước đẩy quả bóng lên. Toàn những chuyện đơn giản "đời thường" mà phát hiện ra vấn đề là một điều quan trọng. Trong việc dạy Toán hiện nay, nhất là ở các lớp năng khiếu, các thầy ra cho học sinh rất nhiều bài toán khó, học sinh vùi đầu làm. Như vậy cũng tốt, có điều họ chẳng hiểu những vấn đề bài toán kia, ai nêu ra đầu tiên, làm sao mà nêu ra được. Trong tình hình đó, họ dễ coi thường những bài toán đơn giản hơn trong đời thường. Họ đâu ý thức được cái "kém" của mình là ít khả năng phát hiện ra những bài toán như vậy ẩn náu trong cuộc sống. Vì chủ quan, họ thấy có thể giải quyết được những bài toán khó hơn rất nhiều

(thực tế lại do ai đó đã phát hiện ra từ bao giờ và ghi lại trong sách vở). Cái gì là khó, cái gì là dễ? Giải được những bài toán khó trong sách cũng là việc nhỏ nhưng dù sao cũng là việc quen thuộc của học sinh giỏi toán. Phát hiện ra những bài toán trong đời thường lại là việc ít quen thuộc hơn và khó hơn nhiều. Đây là cả một vấn đề lớn của giáo dục hiện nay. Hướng giải quyết là phải chuyển từ sư phạm độc thoại, áp đặt, quyền uy sang sư phạm đối thoại, dân chủ. Thầy phải biết hướng dẫn cho trò biết quan sát, chú ý, tò mò, phát hiện ra mâu thuẫn bằng những mẩu đối thoại lí thú, gợi mở, dân chủ với học trò, trân trọng những bước tiến dù nhỏ, dù còn ngây ngô của học trò trên con đường đó. Giữa học trò với nhau cũng nên có những sinh hoạt tập thể từ hai người trở lên để trao đổi với nhau những điều như vậy. Ví dụ việc phát hiện ra rằng nhiều người đi về nhiều hướng khác nhau đều thấy Mặt Trời, Mặt Trăng đi theo mình, là phát hiện ra một mâu thuẫn tuy rất ngây ngô, trẻ con, nhưng rất đáng trân trọng. Đó là xu thế của thời đại ngay nay trong việc dạy và học. Điều đó đòi hỏi một cách nhìn mới về "khó" và "dễ" trong dạy và học.

Thấy được mâu thuẫn (tức là phát hiện ra vấn đề) là một điều tưởng dễ nhưng rất khó và đó thường là tiêu chí để phân biệt nhân tài với người thường, ví dụ như đã nói ở trên, phân biệt Ác-xi-mét, Niu-tơn với người thường. Trong học toán, nhiều khi phải lắng đọng mới thấy ra mâu thuẫn và mới thấy hứng thú. Ví dụ, học sinh học số không (0) nhưng chả thấy thú vị gì hơn so với các số khác, nhưng nếu lắng đọng mới thấy ra ở đây một mâu thuẫn thì mới thấy hứng thú và mới thấy thời xưa, ai nghĩ đến đầu tiên việc đặt ra kí hiệu (0) để chỉ "không có gì cả" thì đó là một sáng kiến to lớn: việc đếm các tập hợp dẫn đến sự ra đời các số tự nhiên: một, hai, ba... rồi đến các chữ số tức là kí hiệu để chỉ các số tự nhiên như số La Mã I, II, III..., chữ số Ả Rập 1,

2, 3... Không có tập hợp thì không có chữ số tương ứng. Trong chữ số La Mã không có chữ số không nên có cái bất tiện là khi muốn chỉ sự vắng mặt của một cái gì đó thì phải diễn tả bằng lời chứ không thể diễn tả bằng kí hiệu, ví dụ: với chữ số La Mã thì với đẳng thức III - (II + I) = ..., không biết viết vế sau như thế nào. Có lẽ phải trải qua nhiều sự bất tiện như vậy, người ta mới thấy nhu cầu phải có một chữ số để chỉ "không có gì". Từ đó mới có cách đếm và viết số theo vị trí các chữ số, chủ yếu là hệ thập phân. Viết các số bằng các chữ số La Mã đã là việc rất khó khăn, nói chi đến việc dùng cách viết đó để làm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia. Có nghĩ như vậy mới thấy việc thêm chữ số (0) để chỉ "không có gì cả", không chỉ là một sáng tạo lớn, mà còn là một sáng tạo vĩ đại.

Cứ học lớt phớt thì khó mà có hứng thú; ở các phần sau, ta sẽ còn thấy những ví dụ khác về sự tìm thấy hứng thú nhờ "văn hóa toán học".

THƯ VIỆN HÀ NỘI
2013/
M136807

Chương bốn

Vậy nên học Toán như thế nào?

Muốn học cái gì cho tốt thì sớm, muộn cũng phải đạt đến sự tự giác học tập, say sưa hứng thú học tập. Đó là điều cơ bản đầu tiên. Nhưng tất cả vấn đề là ở chỗ làm sao có được sự tự giác học tập, say sưa học tập. Những ai kém toán, học bài không hiểu, làm bài không ra, thì chỉ có sợ toán, chứ làm gì có say sưa học toán (chắc các học sinh kém toán nghĩ như vậy). Nhưng ở đời cũng không thiếu những ví dụ về những cái lúc đầu thì sợ, dần dần bớt sợ đi đến làm quen, cuối cùng là thích, say mê. Hồi nhỏ đi học lúc đầu tôi chưa giỏi toán, dần dần mới thích rồi say mê và trở nên giỏi. Sau đây là vài kinh nghiệm: xung quanh ta đâu đâu cũng có hình và số, bình thường có khi ta không chú ý nhưng khi "vấp" phải cái gì đó khó hiểu, lạ đời ta mới bận tâm cách lí giải, lí giải không được, làm ta bứt rứt, khó chịu cho tới một khi nào đó, một hiểu biết mới giúp ta lí giải được, thì ta mới thấm thía rằng điều hiểu biết mới đó là có ích, là đáng quý, là tài tình. Hồi nhỏ, tôi đã từng băn khoăn không hiểu "Mặt Trăng theo ai" khi nhiều trẻ nhỏ, chơi dưới ánh trăng, chạy mỗi đứa một ngả và đứa nào cũng bảo "Trăng theo tao".. Theo ngôn ngữ khoa học giáo dục ngày nay thì người ta bảo đó là một "tình huống có vấn đề". Có vấn đề thật vì đứa chạy xuôi, đứa chạy ngược, đứa chạy sang phải, đứa chạy sang trái, không có đứa nào nói dối, mà tất cả đều bảo "trăng theo tao". Điều đó làm cho tôi bứt rứt cho đến đầu cấp hai, học về đường song song tôi mới vỡ nhẽ. Có lần một bạn đố tôi tìm cạnh của hình vuông, cho

biết diện tích. Tôi bí không biết làm phép gì vì bốn phép cộng, trừ, nhân, chia đều là những phép tác động đến hai số; nhưng đề bài ở đây chỉ cho có một số thôi (diện tích), vậy làm phép gì? Tôi bần thần đi tìm số thứ hai, tôi nghĩ đến 4 vì hình vuông có 4 cạnh và đem chia diện tích cho 4 để tính cạnh. Nhưng sau đó, tôi thử lấy kết quả tìm được để tìm lại diện tích thì thấy không khớp nên biết là mình sai. Đành chịu không làm được bài toán cho đến khi học căn bậc hai của một số, tôi mới sáng ra và lúc đó rất thích thú tập làm phép khai căn bậc hai của các số, say sưa đến mức mẹ gọi ăn cơm đến mấy lần mới chịu bỏ bút. Có lần người chủ nhà nơi chúng tôi trọ học đem ra một miếng tôn tròn và bảo chúng tôi chỉ hộ chỗ đúng chính giữa (tức là tâm) để ông ấy dùi một cái lỗ. Mấy đứa chúng tôi loay hoay mò mẫm mãi với cái compa mà không sao tìm được tâm, khi chệch bên này, khi chệch bên kia một tí. Vấp váp đó làm cho khi học đến định lí về ba đường trung trực trong một tam giác đồng quy tôi mới thấm thía rằng toán học là tài. Còn nhiều chuyện lặt vặt kiểu như trên, kể ra đây rất dài. Cứ thế dần dần tôi yêu toán, thích toán lúc nào không biết, vì càng ngày càng thấy toán rất tài, rất lạ, rất có ích. Điều tôi muốn nói thêm là những người gặp "những tình huống có vấn đề" như tôi đã gặp, có thể còn đốt, thậm chí còn ngây ngô trước các tình huống đó; điều quan trọng là có lưu ý đến, có băn khoăn, lúng túng trước tình huống đó. Trong việc rèn luyện này để đạt đến sự yêu thích toán, nếu có được một người cha, một người anh, một người thầy quan tâm gợi ra cho một cách khắc phục các tình huống có vấn đề về toán học trong học tập, trong lao động, trong vui chơi, trong nghỉ ngơi, thì tốt quá. Trước đây tôi không có được cái may mắn đó như ngày nay với sự nghiệp giáo dục đã phát triển, chắc nhiều học sinh có may mắn đó. Tạp chí *Dạy và học ngày nay* của Hội Khuyến học Việt Nam cũng có thể phần nào giúp học sinh về mặt đó.

Nên học Toán thế nào cho tốt?

Khi bắt đầu yêu thích toán rồi thì tự giác học tập, say sưa học tập, nhưng muốn học tập đạt hiệu quả cao, thì phải thường xuyên rèn luyện phương pháp học tập. Trước hết cần rèn thói quen học tập mọi lúc, mọi nơi, bằng mọi cách, học trong sách, trong thiên nhiên, trong thực tế và xã hội. Đây không phải là yêu cầu gì mới mẻ chỉ là bước phát triển cao hơn của những điều đã nói trong phần "hình thành" lòng yêu toán. Điều khác nhau là ở trên kia các "tình huống có vấn đề" đến với người học toán một cách ngẫu nhiên, có phần nhẹ nhàng, không dụng ý trước, may mắn, tình cờ mà gặp được nên cũng hiếm gặp và vì vậy tác dụng cũng hạn chế, còn ở đây người học toán có ý thức chủ động làm xuất hiện các tình huống có vấn đề rồi tập trung suy nghĩ giải quyết các vấn đề đặt ra, cố gắng vận dụng các hiểu biết và các phương pháp suy luận toán học, tự mình đạt những hiểu biết mới (ít nhất là mới đối với mình). Như vậy là từ chỗ thụ động ngồi chờ sự may mắn đem đến các tình huống có vấn đề, ta chủ động suy nghĩ, lắng đọng để thấy được mâu thuẫn, làm xuất hiện vấn đề như ở trên ta đã làm với chữ số 0. Trong cuộc đời học sinh trước đây, tôi đã từng băn khoăn tự hỏi con tàu hỏa mình đang đi (chứ không phải tàu hỏa nói trong sách giáo khoa) có tốc độ trung bình là bao nhiêu, lúc chạy từ từ vào ga là bao nhiêu và đã suy nghĩ tìm cách trả lời thông minh nhất, đưa đến chỗ nghĩ ra cách đếm nhịp các tiếng động phát ra ở chỗ chắp nối hai thanh ray khi bánh xe lăn trên đó để tính xem trong từng khoảng thời gian (một phút, năm phút, mười phút v.v...), tàu lăn đi một khoảng bằng mấy lần chiều dài thanh ray và giữa hai cột kilômét có bao nhiêu thanh ray để tính chiều dài mỗi thanh ray. Tôi cũng đã từng tự hỏi và tìm cách trả lời xem các số ghi trên các loại cột hai bên đường chỉ cái gì, đã từng quan sát và tự hỏi xem tại sao bóng nắng mái nhà lại song song với thềm nhà, đã từng nghĩ xem có thể căn cứ vào hình trăng lưỡi liềm để tính ra vị trí tương

đối của Mặt Trời, Mặt Trăng và Trái Đất trong không gian hay không, đã từng say sưa giải những bài toán vui đố nhau và cả vào lúc vài anh em bạn ngả lưng giải lao khi lao động, hay học tập mệt nhọc. Tôi đã từng tập đo một số khoảng cách bằng cách sử dụng những hiểu biết về tam giác bằng nhau và đồng dạng. Nhưng không phải khi nào cũng đo vì không phải lúc nào cũng có dụng cụ mà biết tận dụng những cái có sẵn như các cột kilômét rồi đếm nhịp tàu mà tính ra chiều dài mỗi thanh ray, hay đếm số gạch vuông lát nền nhà mà tính ra kích thước của một phòng v.v... Đã có lúc tôi dùng dây gập lại rồi đánh dấu thành 12 đoạn bằng nhau để tạo một tam giác có 3 cạnh theo thứ tự dài bằng 3, 4, 5 đoạn đó để chỉ với một cái dây tạo ra được góc vuông chính xác. Tôi cũng đã từng quan sát xem mái nhà mình đổ xuống sân lúc mặt trời mọc thay đổi trong một năm như thế nào để lĩnh hội được thấu đáo về chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời. Tôi xin tạm dừng không kể thêm nữa mà chỉ muốn lưu ý rằng những việc kể trên không đòi hỏi ở người làm các việc đó một trình độ cao, sâu về kiến thức và phương pháp toán học; nội dung toán học trong các việc đó cũng đơn giản thôi. Cho nên ai cũng rèn luyện được, chả cứ gì người xuất sắc.

Dần dần tôi tạo cho mình được một thói quen khi nào cũng sẵn sàng có một vấn đề gì đó, hoặc là từ sách vở, hoặc từ thực tiễn, đang suy nghĩ dở dang chưa đâu vào đâu, để hễ có dịp là suy nghĩ đến nó vào những lúc rỗi để khỏi bỏ phí thời gian như chờ tàu, chờ xe, chờ cắt tóc, chẳng biết làm gì hơn cho đỡ sốt ruột mà lại có ích. Nhiều khi cứ phải nhẩm tính hay hình dung ra trong óc vì không có sẵn bút, giấy. Điều đó cũng rèn luyện sức tập trung tư tưởng, trí tưởng tượng không gian. Nhờ vậy, khi ra làm giáo viên, gặp hoàn cảnh ở trọ chung với học trò, tối đến nhường bàn cho học sinh học nên thiếu bàn làm việc, tôi đã soạn giáo án bằng cách nằm hóng mát (đêm hè) hay đắp chăn (đêm

đông) để suy nghĩ về bài giảng toán, mượn bầu trời hay đỉnh màn làm vở soạn, rồi tưởng tượng ra trên đó những hình, những số.

Đi vào học tập nội khóa, tôi chú ý đào sâu, lật đi lật lại vấn đề, tìm ví dụ và phản ví dụ. Lúc đầu tôi hay coi thường các định nghĩa mà chú trọng các định lí vì cho rằng định lí cho ta những tính chất lí thú hơn. Nhưng dần dần tôi mới hiểu ra các định nghĩa rất quan trọng, vì đó là xuất phát điểm để đi tới các định lí. Khi đã học điều kiện ắt có và đủ tôi mới hiểu được rằng: để định nghĩa một khái niệm, người ta chọn một tính chất là điều kiện ắt có và đủ để có khái niệm đó, làm nội dung của định nghĩa và nếu vi phạm vào tiêu chuẩn "ắt có và đủ" thì sẽ mắc sai lầm. Ví dụ: Lần đầu học định nghĩa "hình bình hành", tôi suy nghĩ còn hời hợt lắm, nhưng khi học "điều kiện ắt có và đủ" tôi đã không ngại mất thời giờ quay lại sâu sắc hơn như sau: tính chất của một tứ giác "có các cạnh đối diện song song" là điều kiện ắt có và đủ để tứ giác đó trở thành hình bình hành nên có thể định nghĩa hình bình hành là một tứ giác có các cạnh đối diện song song. Còn tính chất một tứ giác "có các cạnh đối diện bằng nhau" là ắt có mà không đủ để tứ giác đó trở thành hình bình hành nên không thể dùng làm định nghĩa được. Muốn khỏi vi phạm tiêu chuẩn "ắt có và đủ" thì phải thêm chữ "lồi" vào sau chữ "tứ giác" vì một tứ giác chéo có các cạnh đối diện bằng nhau (như hình tạo bởi hai cạnh đối diện và hai đường chéo của một hình chữ nhật) thì không phải là hình bình hành. Vì vậy, lại có thể định nghĩa hình bình hành là một tứ giác lồi có các cạnh đối diện bằng nhau. Trong khi học, tôi cứ lật đi lật lại vấn đề như vậy, tìm các điều kiện "ắt có và đủ" khác nhau để có các định nghĩa khác nhau về cùng một khái niệm, đồng thời tìm các điều kiện "ắt có mà không đủ" hoặc "đủ mà không ắt có" để tạo ra các phản ví dụ. Bằng cách đó, tôi nắm các khái niệm rất chắc và rất sâu. Khi

học định lí, tôi cố gắng phân biệt rõ giả thiết và kết luận. Đối với những định lí tương đối phức tạp hay có phần tế nhị, tôi phải đi sâu vào từng điểm trong giả thiết và ý nghĩa của mỗi điểm đó, thử vi phạm một điểm nào đó trong giả thiết để xem điều đó ảnh hưởng đến kết luận ra sao. Ví dụ trong định lí về giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$ khi $x \to 0$ tôi chú ý giả thiết "x tính bằng radian" và tự đặt câu hỏi: nếu x tính bằng độ thì sao? Tôi thường tự đặt trách nhiệm cho mình, khi nào đã có một mệnh đề thuận thì thử xây dựng các mệnh đề đảo, phản, phản đảo, tự đặt cho mình yêu cầu phát biểu công thức thành lời để tránh việc chỉ nhìn thấy hình thức, máy móc, bỏ qua những chi tiết quan trọng. Ví dụ:

Nếu $y = \frac{u}{v}$ thì $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ –phải được diễn tả chính xác như sau: nếu u và v là hai hàm số của x cùng xác định trong một miền Δ, và có đạo hàm u' và v' đối với x trong miền đó thì hàm số y của x sẽ xác định trong Δ, trừ tại các giá trị của x làm cho v triệt tiêu và sẽ có đạo hàm đối với x trong miền xác định của nó; đạo hàm y' đó bằng $\frac{vu' - uv'}{v^2}$. Không phát biểu như vậy thì có khi quên mất đạo hàm đối với biến số nào và quên mất đạo hàm có xác định hay không, và điều đó có thể dẫn tới sai lầm.

Tôi không làm nhiều bài tập mà thường để thời gian đi sâu vào một số bài lí thú, suy nghĩ về đường lối giải bài, có khi cố gắng mở rộng thêm một vài câu hỏi. Tôi theo đuổi một bài toán khó có khi hàng tháng, có thì giờ rỗi rãi lại nghĩ đến nó, kì làm ra mới thôi. Tôi không tán thành một số bạn hồi đó dùng sách "bài tập giải mẫu", để thì giờ, công sức chép rất đẹp nhưng chẳng mấy khi sử dụng, nếu có dùng những sách ấy, tôi cũng chỉ

chép vài đề, tự lực mình làm đến mức hết sức cố gắng lúc ấy mới đọc bài giải mẫu, xem người ta có điểm nào suy nghĩ về những điểm đó, có ghi thì chỉ ghi những ý cơ bản trong các điểm đó. Hồi chúng tôi học, sách giáo khoa, sách tham khảo cũng hiếm. Mượn được sách, tôi không cúi đầu cúi cổ chép mà đọc cho hiểu rồi ghi những ý cơ bản của các chứng minh, điều gì đã hiểu và cho rằng sau này có thể tự mình suy ra được thì không ghi. Ví dụ chỉ ghi "Vẽ đường phụ nào đó, làm phép biến đổi nào đó", gọn vậy thôi chứ không chép phần chứng minh.

Có bạn tôi hồi đó cho rằng tôi học "gạo" lắm, nghĩa là chúi đầu, chúi mũi học ghê lắm, nhất là học toán, chẳng còn biết gì khác. Một số thầy giáo hiểu tôi nhiều nhất thì nói: "Em ấy biết cách học". Quả thế, tuy say mê toán, nhưng tôi vẫn học toàn diện và cũng say mê nhiều môn khác: Lí, Hóa, Sinh, Địa, Văn, v.v... Tôi nhớ đã từng say sưa bắt sâu bọ nuôi trong lọ thủy tinh để quan sát, say sưa tra cứu các loại bản đồ, bị hấp dẫn bởi các công thức hóa học. Tôi cũng thích đọc chuyện, xem phim, đánh bóng bàn, học nhạc, có khi tập làm thơ nữa. Lấy thì giờ đâu? Đó chính là cách học mọi nơi, mọi lúc, mọi cách, dùng được những thì giờ mà mọi người vẫn coi là vô ích, tránh mất thì giờ vào những công việc ít mang lại hiệu quả (như chép nhiều mà không hiểu, không dùng), biết chọn việc mà làm, biết tập trung vào cái gì, bỏ qua cái gì, biết làm một việc mà đạt được nhiều mục đích, học môn này, hỗ trợ môn kia, lấy kiến thức sách vở và kiến thức thực tế bổ sung cho nhau, lấy phương pháp học tập hỗ trợ việc tiếp thu kiến thức, lấy việc tiếp thu kiến thức sách vở và kiến thức thực tế bổ sung cho nhau, lấy phương pháp học tập hỗ trợ việc tiếp thu kiến thức, lấy việc tiếp thu kiến thức có chiều sâu để suy ngẫm mà hoàn chỉnh phương pháp học tập. Tôi rất cảm ơn các thầy đã dạy mình đồng thời cũng sớm thấy rằng sự cố gắng của

mình mới là quyết định. Nỗ lực bản thân là sự thể nghiệm tích cực để đi đến hoàn chỉnh dần phương pháp chiếm lĩnh kiến thức. Lúc đầu có thể non nớt bỡ ngỡ nhưng rồi cái non nớt, bỡ ngỡ sẽ qua đi. Từ cấp II trở đi, tôi đã không tìm thầy học tư trong mấy tháng hè mà tự xác định cho mình là phải "tự ôn lấy", đồng thời đảm nhận việc dạy hè cho các em ruột đang học tiểu học. Khi vào Huế học cấp III, vì thành phố có thư viện cấp thẻ đọc, tôi đã xin thẻ để vào đọc sách thêm ở đó. Rất tiếc hiện nay, nhiều học sinh, kể cả học sinh khá, giỏi không tự học thêm bằng cách đi thư viện, mà chỉ bằng cách tìm thầy học tư.

Cách học như trên mang lại một hiệu quả mà chính người học lúc đầu cũng không ngờ. Đó là những đức tính, phẩm chất mà qua thực tiễn học tập và công tác nhiều năm mới thấy rõ là cần thiết như thế nào. Đó là sự đòi hỏi chính xác đối với bản thân và đối với người khác, không chấp nhận những kiểu "lập luận dễ dãi", luôn đòi hỏi sự lật đi lật lại vấn đề, xem xét, ngược xuôi cho kín kẽ. Đó là sự nhạy cảm trong việc liên hệ học với hành: đó là đức tính cẩn thận, suy xét thận trọng, không hấp tấp, làm rồi có thử lại để kiểm tra. Đó là sự kiên nhẫn làm những con tính dài dòng, khô khan, vẽ đi vẽ lại những hình rất chính xác, vì đã có kinh nghiệm nhiều lần rằng một sự thiếu kiên nhẫn nhiều khi phải trả giá đắt, thành công đã ở trong tầm tay mà bỏ dở. Đó là tinh thần tiến công liên tiếp, biết một rồi lại muốn biết hai, tìm ra lời giải gọn rồi lại muốn tìm lời giải gọn hơn v.v..., không bao giờ thỏa mãn. Đó là sự rung cảm trước những lời giải hay, gọn đẹp, trước những ứng dụng tài tình của các kiến thức toán, trước những suy nghĩ độc đáo, táo bạo. Lúc còn là học sinh, tôi đã biết khâm phục những người nào đầu tiên nghĩ ra số "không": hay thật, táo bạo thật; người ta đặt ra số để đếm, để viết. Có gì mới đếm, mới viết chứ. Chả có gì cả mà cũng nghĩ ra số: "không" mà

hóa thành "có", "không" mà phục vụ cho "có". Làm toán, nhiều khi tôi thấy thật là biến hóa thần thông, y như trong *Tây du kí*, Tề Thiên Đại Thánh thoắt biến thành cái này, thoắt biến thành cái kia: rất to biến thành nhỏ, rất nhỏ lại biến thành rất to (chẳng hạn dùng phép biến đổi $x' = \frac{1}{x}$), tròn hóa thành thẳng, thẳng hóa thành tròn (chẳng hạn dùng phép biến đổi $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$ trong hệ tọa độ vuông góc quen thuộc thì vòng tròn $x^2 + y^2 = 2x$ biến thành đường thẳng $x' = \frac{1}{2}$ và ngược lại). Cuối cùng, một kết quả rất đáng quý nữa là tư duy toán học của tôi ngày càng mềm mại ra, càng uyển chuyển, không máy móc, cứng đờ, nhờ được rèn luyện qua "biện luận", qua xét "xuôi và ngược", "chung và riêng" v.v... Sau này tôi mới biết sự mềm mại, uyển chuyển, đó chính là dấu hiệu của tư duy "biện chứng", rất cần thiết cho sáng tạo toán học.

Sự rèn luyện như trên với bao nhiêu bỡ ngỡ ban đầu, tích lũy nhiều năm trong cuộc đời học sinh phổ thông của tôi, đã đưa tôi đi xa sau này, mặc dù tôi gặp hoàn cảnh khó khăn khách quan phải kết thúc việc học trên ghế nhà trường lúc chưa học hết năm thứ nhất đại học. Sau đó thì tôi vừa công tác, vừa tự học và hồi đó số người tự học như tôi chưa có bao nhiêu, nên hoàn toàn chưa có chế độ, chính sách gì như đối với người học tại chức sau này: thì giờ và điều kiện học tự mình thu xếp lấy, học gì, theo chương trình nào, tài liệu, sách vở tìm ở đâu cũng tự mình lo liệu. Không ai đôn đốc, nhắc nhở. Học chỗ nào không hiểu, chẳng có ai mà hỏi, tự mình xoay cách này hay cách khác, thử thế này, thử thế

kia, đọc tài liệu này, đọc tài liệu nọ, cuối cùng có khi sau nhiều năm, điều không hiểu đó cũng sáng ra. Nhưng hồi đó chính quyền cách mạng, đã có hai điều quan tâm quan trọng đối với tôi: mở một kì thi đặc cách công nhận tôi có trình độ đại học và tiếp đó, chuyển tôi từ một giáo viên phổ thông mới ra công tác được 4 năm, lên dạy đại học. Hai sự kiện này như chắp cánh cho tôi bay lên. Trường đại học kháng chiến (chống Pháp) sách chưa nhiều, nhưng đối với tôi lúc đó thật là quý. Nhờ có thói quen, có phương pháp, có nghị lực học đã được rèn luyện từ khi học phổ thông rồi dạy phổ thông, tôi vững bước tự lực vươn lên. Nhu cầu hiểu biết, sự thôi thúc của việc dạy cho hay, cho sâu đã dẫn tôi tìm tòi, sáng tạo thật sự và tôi bước vào "nghiên cứu khoa học" theo nghĩa nghiêm túc của hai chữ đó, lúc nào không biết. Một công trình khoa học đầu tay đã ra đời mà không ai hướng dẫn. Sau đó tôi được sang Liên Xô 9 tháng để hoàn chỉnh và bảo vệ luận án tiến sĩ. Tính từ lúc bắt tay vào nghiên cứu trong nước cho đến lúc bảo vệ thành công luận án tiến sĩ, mất tất cả độ 2 năm (thời gian ở trong nước vẫn không miễn giảm công tác). Nghe nói thì đơn giản nhưng thực ra 2 năm đó đã được chuẩn bị từ nhiều năm trước đó bởi cách học tập như trên. Bảo vệ xong luận án tôi trở về nước công tác và với tác phong vừa công tác vừa học tập một cách sáng tạo, 5 năm sau tôi lại hoàn thành một công trình nghiên cứu toán học tầm cỡ lớn hơn nhiều và viết thành luận án Tiến sĩ khoa học gửi sang Liên Xô trước, sau đó qua Liên Xô 3 tháng, đủ thời gian làm thủ tục và bảo vệ thành công. Tiếp theo luận án tiến sĩ khoa học, tôi lại có công trình nghiên cứu lớn hơn, năm 1969 phát minh ra một định lí toán học mới gọi là hình học siêu phi Ơ-clít, một hướng mở rộng khá táo bạo hình học phi Ơ-clít mà Lôbasepki khai sinh năm 1826.

Nghĩ lại, lúc còn học tiểu học, tôi là học sinh trên trung bình, trong lớp 40 học sinh có lúc đã bị xếp xuống thứ 15, lúc

cao nhất chỉ xếp được thứ 6, lên đến cấp II, vào khoảng giữa năm học thứ hai tôi mới bắt đầu được thầy và bạn chú ý về khả năng học toán và từ năm thứ ba trở đi mới thật sự nổi lên là một trong những học sinh giỏi toán của lớp. Điều đó cho tôi nghĩ rằng, cũng có vấn đề năng khiếu phần nào, nhưng cách học tập thật là quan trọng. Tôi nói như vậy không phải là để động viên những học sinh hiện chưa khá toán, mà sự thật đời học sinh của tôi là như vậy. Mong rằng những điều kể trên đây có thể giúp ích nhiều cho các em học sinh và cho cả sinh viên các khoa Toán. Dĩ nhiên, đã chọn khoa Toán để học đại học thì cũng phải khá, giỏi về toán và yêu thích môn Toán. Nhưng không thể chủ quan, vì trong số sinh viên các khoa Toán, một tỉ lệ không nhỏ học toán cũng bình thường, thậm chí kém. Vả chăng, sinh viên học giỏi cũng không nên tự mãn và phải luôn chăm lo học cả kiến thức và cả văn hóa toán học vì kiến thức toán học càng cao thì văn hóa toán học càng sâu, đụng chạm càng nhiều đến những vấn đề triết học. Ở chương 5 ta sẽ thấy rõ.

Chương năm

Muốn sáng tạo phải rất coi trọng tư duy biện chứng và tư duy hình tượng

Sáng tạo là một sự vận động từ cái cũ đến cái mới tiến bộ hơn so với cái cũ xét theo mục đích của người nghiên cứu. Đã là "vận động" thì phải chấp nhận luật "phi bài trung": A vừa là A vừa đồng thời không phải là A. Sự "đồng thời không phải là A" diễn tả sự vận động, giống như một cái xe đương chạy thì từng lúc nó ở một vị trí A xác định nhưng đồng thời, do có tốc độ, nó lập tức chuyển sang vị trí khác với A. Vậy lúc đó, nó vừa ở A, vừa không ở A. Trong tư duy biện chứng, có ba suy luận sau đây:

1. *Sự thống nhất và đấu tranh giữa các mặt đối lập:* Trong mọi sự vật, khi đã có A thì đồng thời cũng có mặt đối lập với A. Ví dụ, trong khó khăn có thuận lợi, trong thuận lợi có khó khăn. Chẳng hạn như đi bộ thì rất chậm nhưng lại rất chủ động, rất ít tốn kém, đi ô tô thì nhanh nhưng tốn kém, lại phải có xe, có xăng dầu, có đường tốt, phải học lái xe hoặc đi thuê lái xe. Tam giác là tam giác, đồng thời cũng là tứ giác (có một cạnh bằng không). Số nguyên là số nguyên, đồng thời cũng là phân số (có mẫu số bằng 1).

2. *Sự phủ định của phủ định.* Khi có vấn đề, tức là khi gặp phải hai sự vật nào đó phủ định lẫn nhau thì phương hướng giải quyết vấn đề là tìm cách xóa bỏ sự phủ định nói trên, tức là tìm cho được sự phủ định của phủ định. Ví dụ, số nguyên và phép chia phủ định lẫn nhau vì với số nguyên thì phép chia không phải khi nào cũng làm được; sự ra đời của phân số đã phủ định sự phủ định nói trên, tức là phép chia (cho một số khác không) bao giờ cũng làm được.

3. *Sự phát triển từ tiệm tiến đến nhảy vọt*

Hàm số $y = \frac{1}{x}$ biến thiên liên tục (tiệm tiến) khi qua giá trị $x = 0$ thì có đột biến (nhảy vọt).

- Nung nấu suy nghĩ (tiệm tiến) rồi tìm ra lời giải (nhảy vọt).

Chỉ ba quy luật đó thôi mà thiên biến, vạn hóa, giúp người ta sáng tạo vô cùng. Để vận dụng quy luật thứ nhất, thường người ta hay xếp các mặt đối lập (cùng tồn tại trong sự vật vì A vừa là A, vừa đồng thời không phải là A) thành các cặp phạm trù:

Cái chung và cái riêng
Nội dung và hình thức
Bản chất và hiện tượng
Chủ quan và khách quan
Vận động và đứng yên
Tất nhiên và ngẫu nhiên
Cụ thể và trừu tượng
Phân tích và tổng hợp
Quy nạp và suy diễn
Lí luận và thực tiễn.

Các cặp phạm trù nêu ra trên đây rất hay gặp trong toán học. Do khuôn khổ hạn chế, nên không thể đi sâu. Bạn đọc nào

muốn nghiên cứu, xin xem [1] và [2] trong mục lục sách báo tham khảo.

Dưới đây xin nêu ra ba ví dụ với trình độ toán khác nhau để chứng tỏ quy luật sáng tạo trong toán học là như nhau, từ trình độ tiểu học đến bác học, chỉ khác nhau ở tầm vóc các vấn đề nghiên cứu và trình độ các kiến thức vận dụng để nghiên cứu.

Ví dụ 1

Cùng một số (một nội dung), học sinh tiểu học nhiều khi đã phải diễn tả nó ra thành những hình thức khác nhau để tính toán cho nhanh, ví dụ như học sinh lớp 1, khi phải cộng thêm "chín" thì thấy khó vì "chín" là số lớn (đối với các em) nên phải dùng que tính mới làm được, em nào thông minh sẽ viết "chín" không phải dưới hình thức 9 mà dưới hình thức 10 - 1 để biến phép cộng thêm 9 (khó) thành 2 phép cộng thêm 10 rồi trừ đi 1 (cả hai đều dễ). Một cách vô ý thức em nào thông minh như vậy, thực ra đã vận dụng triết học tư duy biện chứng về mối quan hệ qua lại giữa nội dung và hình thức (9 và 10 - 1) và hình thức tác động trở lại nội dung (hình thức 10 - 1 làm cho phép cộng thêm 9 trở nên dễ hơn). Dĩ nhiên, học sinh lớp 1 không thể hiểu nổi tư tưởng triết học đó nhưng nếu giáo viên thần thoại hóa "chín" thành một cô tiên có phép biến hóa thần thông, khi thì hiện ra thành một cô gái có cái lưng ong (9), khi lại hiện ra thành một cái cầu bắc qua sông (10 - 1).

Hoặc như khi phải tính 7 + 9 + 6 + 3 thì học sinh viết tổng trên dưới một hình thức khác 7 + 3 + 10 - 1 + 6 (thực chất là vận dụng luật giao hoán của phép cộng) để tính nhẩm cho nhanh, đem 3 đặt cạnh 7 để có 10, đổi 9 thành 10 - 1 thì có ngay 10 + 10 + 5 = 25).

Ví dụ 2

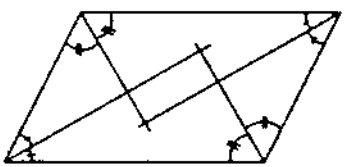
Tôi có đi dự một tiết học toán ở trường phổ thông cơ sở. Hôm đó giáo viên có nói một câu: "Hình thoi có tất cả tính chất

của hình bình thành (vì nó cũng là một hình bình hành) và ngoài ra nó còn có những tính chất mà hình bình hành không có, ví dụ tính chất: "Hai đường chéo vuông góc và là phân giác của các góc". Về nhà tôi đã viết 4 bài đăng trên báo *Khoa học và đời sống* rồi gửi cho giám đốc Sở Giáo dục làm tài liệu bồi dưỡng giáo viên. Sau đây là 4 bài đó.

Bài 1. Đúng mà chưa thật đúng

(Trích từ báo *Khoa học và đời sống*, ngày 16-12-1983).

Một cô giáo dạy bài "hình thoi", cuối tiết học, cô tóm tắt để củng cố kiến thức cho học sinh như sau:



Hình thoi là một hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau, vì vậy một mặt nó có tất cả các tính chất của hình bình hành, mặt khác nó có thêm những tính chất mà hình bình hành (không phải là hình thoi) không có ví như tính chất: trong một hình thoi, hai đường chéo vuông góc với nhau và là phân giác của các góc.

Cô nói thế thì đúng quá đi còn gì. Xin chớ vội kết luận. Hãy tưởng tượng cạnh lớn của một hình bình hành ngắn dần đi và cuối cùng bằng cạnh bé. Trong suốt quá trình đó, một tính chất A nào đó của hình bình hành vẫn giữ nguyên cho đến khi hình bình hành trở thành hình thoi thì A đạt đến giới hạn A'. A' có thể giống như A (ví dụ khi A là tính chất: Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường): A' cũng có thể có một dạng phát biểu khác dạng phát biểu của A nhưng về bản chất vẫn là một trường hợp giới hạn của A. Ngược lại, mỗi tính chất A' của hình thoi đều phải là một trường hợp giới hạn của ít nhất một

tính chất A nào đó của hình bình hành. Ta lấy ngay ví dụ trong câu nói để xem xét:

A': *"Trong một hình thoi hai đường chéo vuông góc với nhau và là phân giác của các góc"*.

Vậy ở đây A là gì? Trong hình thoi, đường chéo đồng thời là phân giác. Trong hình bình hành (không phải là hình thoi) thì đường chéo không phải là phân giác. Vậy một đường thẳng nối hai đỉnh đối diện trong một hình thoi có thể xem xét dưới hai góc độ khác nhau: đó là giới hạn của một đường chéo trong hình bình hành hay đó là giới hạn của một phân giác trong hình bình hành. Xét theo góc độ thứ nhất, ta khó thấy được A là gì. Nhưng xét theo góc độ thứ hai, ta thấy ngay.

A: *"Trong một hình bình hành, các phân giác tạo nên một hình chữ nhật"*.

Quả vậy, khi cạnh lớn ngắn dần, hình chữ nhật cũng nhỏ đi và trở thành một điểm khi hình bình hành trở thành hình thoi. Bạn đọc nào thích nghiên cứu có thể tìm thêm xem A' có còn là giới hạn của một tính chất nào khác trong hình bình hành hay không?

Cho nên cô giáo phát biểu như trên là đúng mà chưa thật đúng. Những tính chất mà cô bảo là hình bình hành không có thì đúng ra là có nhưng dưới dạng tổng quát hơn (không những thế, khi hình thoi có một, nó có thể có nhiều tính chất tương ứng).

Trên đây là cách suy nghĩ mà người ta gọi là biện chứng: Hình thoi và hình bình hành vừa là mâu thuẫn (hình thoi có những tính chất mà hình bình hành không có) vừa là thống nhất (hình bình hành cũng có những tính chất đó nhưng dưới dạng tổng quát hơn).

Bạn đọc hãy thử vận dụng cách suy nghĩ trên để xem xét vấn đề sau đây: nếu A' là tính chất: "trong một hình bình hành

tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo" thì A có thể là tính chất gì trong một tứ giác không phải hình bình hành? Cách suy nghĩ trên đây quả là lợi hại.

Bài 2. Hãy tiếp tục tìm tòi

(Trích ở báo *Khoa học và đời sống*, ngày 01-3-1984).

Báo *Khoa học và đời sống*, số ra ngày 16-12-1983, trong bài: "*Đúng mà chưa thật đúng*", chúng ta thấy rằng không phải hình bình hành không có tính chất sau đây của một hình thoi:

A': Trong một hình thoi, hai đường chéo vuông góc và là phân giác các góc.

Mà có dưới dạng tổng quát hơn.

A: Trong một hình bình hành, bốn phân giác của các góc tạo nên một hình chữ nhật.

Khi hình bình hành trở thành hình thoi thì A trở thành A'.

Không phải chỉ có A mới trở thành A'. Vì vậy ta kí hiệu A là A_1 và tìm xem có một tính chất A_2 nào khác của hình bình hành cũng trở thành A' hay không?

Theo A' (hình 1) thì $\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2$ (1) nhờ định lí Pi-ta-go hay:

$$\overline{4MN}^2 = \overline{4OM}^2 + \overline{4ON}^2 \qquad (2)$$

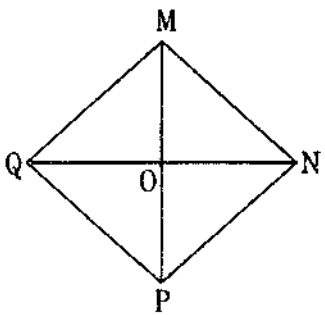
Hay (vì bốn cạnh hình thoi bằng nhau):

$$\overline{MN}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2 \qquad (3)$$

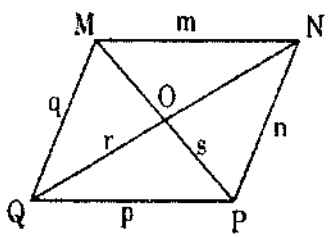
trong hình bình hành không phải là hình thoi, đẳng thức (3) cũng đúng, điều mà bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng (2). Ngược lại, khi hình bình hành là một hình thoi từ đẳng thức (3) có thể trở về đẳng thức (2) rồi từ đó về đẳng thức (1) để chứng minh

rằng hai đường chéo vuông góc và do đó cũng là phân giác của các góc (vì lúc đó ON là đường cao trong tam giác cân MNP nên đồng thời là phân giác của góc N). Vậy A' còn là trường hợp giới hạn của tính chất sau đây:

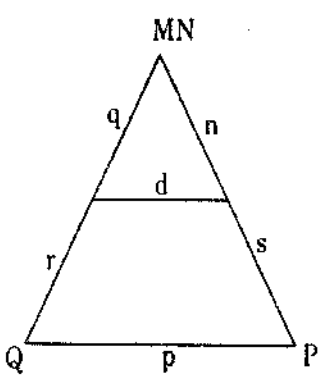
A_2: Trong một hình bình hành, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Đến đây, chắc bạn hiểu hai chữ "ít nhất" trong câu: mỗi tính chất của hình thoi phải là giới hạn của ít nhất một tính chất nào đó, tổng quát hơn, ở trong hình bình hành. Câu này đính chính cho thật đúng câu mà cô giáo nói với học sinh: hình thoi có những tính chất mà hình bình hành (không phải là hình thoi) không có. Trên đà này hãy đi xa hơn, đồng thời kiểm nghiệm thêm sức mạnh của cách lập luận biện chứng. Ta thử trả lời luôn câu hỏi đã đặt ra trong bài báo: "đúng mà chưa thật đúng": A_2 là giới hạn của tính chất nào trong một tứ giác không hình bình hành?

Trong một hình bình hành, hai đường chéo có chung trung điểm. Trong một tứ giác không bình hành, hai đường chéo có trung điểm tách biệt. Đó là hai mặt mâu thuẫn giữa hình bình hành và tứ giác không bình hành. Hai trung điểm tách biệt cách nhau một khoảng *d* nào đó. Thử tưởng tượng *d* nhỏ dần và cuối cùng triệt tiêu thì tứ giác tiến dần đến và cuối cùng trở thành bình hành. Đó là mặt thống nhất giữa hai hình.

Trong hình bình hành, ta có hệ thức (theo A_2)

$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = r^2 + s^2$ (hình 2), hệ thức này là giới hạn (khi $d = 0$) của một hệ thức tổng quát hơn trong tứ giác.

Vậy ta tiên đoán rằng hệ thức tổng quát đó phải có dạng:

$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = r^2 + f(d)$, trong đó $f(d)$ là một hàm của d sao cho $f(d) = 0$ khi $d = 0$.

Lập luận biện chứng dẫn ra tới đây. Để tiên đoán chính xác hơn nữa, ta dùng lập luận lôgic bình thường.

Vì các số hạng trong hệ thức trên đều bậc hai (đối với các đoạn thẳng) nên $f(d)$ phải bậc hai và phải chứa d làm thừa số. Vậy $f(d)$ có thể có dạng kd^2 hoặc $k'ld$, trong đó có k và k' là những hệ số nào đó. Nhìn vào dạng của hệ thức, ta thiên về $f(d) = kd^2$.

$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + kd^2$

Để tìm k, ta áp dụng hệ thức trên cho tứ giác MNPQ trong đó M và N trùng nhau (hình 3). Ở đây

$$m = 0, q = r, d = \frac{P}{2}$$

Vậy $n^2 + p^2 + q^2 = q^2 + n^2 + \frac{kp^2}{4}$, do đó k = 4 và A_2 rút cuộc được tiên đoán là giới hạn của tính chất sau đây:

A_2: Trong một tứ giác, tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo cộng với bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo.

Bài 3. Hãy đi xa hơn nữa

(Trích từ báo *Khoa học và đời sống*, ngày 16-3-1984)

Trong hai bài toán trước, chúng ta đã từ tính chất A' sau đây lần lên đến hai tính chất A_1, A_2 rồi từ A_2 lần lên nữa đến $\overline{A_2}$ theo hướng càng lên càng tổng quát:

A': *Trong hình thoi, hai đường chéo vuông góc với nhau và là phân giác của các góc.*

A_1: *Trong hình bình hành, các phân giác tạo nên hình chữ nhật.*

A_2: *Trong hình bình hành, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo.*

Có thể đi xa hơn nữa không? Tư tưởng tiến công không cho phép dừng lại ở đây. Trước hết, do từ A_2 lên được $\overline{A_2}$, ta phải tò mò tự hỏi: "Thế A_1 lên được đến đâu?". Sự tìm tòi ở đây

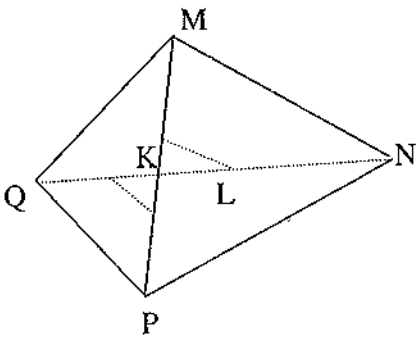
không có gì khó. Bạn đọc tự tìm lấy và thấy ngay rằng A_1 lên $\overline{A_1}$ như sau:

$\overline{A_1}$: Trong tứ giác, bốn phân giác tạo nên một tứ giác nội tiếp.

Tư tưởng tiến công lại buộc ta phải suy nghĩ từ $\overline{A_1}$ và $\overline{A_2}$ rồi lên gì nữa? Cái gì khái quát hơn tứ giác? Có hai hướng để suy nghĩ: Một là coi tứ giác là một ngũ giác đặc biệt có một cạnh triệt tiêu để rồi từ $\overline{A_1}$ và $\overline{A_2}$ khái quát lên cho ngũ giác, hai là coi tứ giác phẳng như một tứ giác ghềnh đặc biệt. Như vậy có bốn vấn đề để nghiên cứu, lựa chọn. Mở rộng vào ngũ giác thì vừa phức tạp, mất thì giờ, vừa không biết chắc có kết quả thiết thực. Mở rộng $\overline{A_1}$ ra cho tứ giác ghềnh cũng phức tạp và cũng không chắc cho kết quả gì thiết thực vì bốn phân giác không cùng nằm trong một mặt phẳng. Vậy ta chọn vấn đề mở rộng $\overline{A_2}$ ra cho tứ giác ghềnh: Trong một tứ giác phẳng, hai đường chéo cùng nằm trong một mặt phẳng, trong tứ giác ghềnh, không có hiện tượng ấy. Đó là một mâu thuẫn giữa tứ giác phẳng và tứ giác ghềnh. Trong tứ giác ghềnh, hai đường chéo có một đường vuông góc chung mà chiều dài h là khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường chéo đó; thử tưởng tượng h nhỏ dần rồi triệt tiêu thì tứ giác ghềnh dần tiến đến và cuối cùng trở thành tứ giác phẳng; đó là mặt thống nhất giữa tứ giác phẳng và tứ giác ghềnh. Từ đó tiên đoán rằng trong một tứ giác ghềnh ta có hệ thức dạng sau đây:

$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + 4d^2 + g(h)$, trong đó g(h) là một hàm của h triệt tiêu khi h = 0. Cũng lập luận như ở bài

"hãy tiếp tục tìm tòi", ta thấy g(h) có dạng λh^2, trong đó λ là một hệ số nào đó. Để tìm λ ta áp dụng hệ thức trên cho tứ giác ghềnh đặc biệt mà bốn cạnh của một khối tứ diện đều có cạnh bằng a



Lúc đó m = n = p = q = r = s = a còn $h = d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nên hệ thức trên cho ta:

$4a^2 = 2a^2 + 4\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \lambda\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, từ đó rút ra $\lambda = 0$.

Vậy mở rộng $\overline{A_2}$, ra cho tứ giác ghềnh, ta được một tính chất $\overline{A_2}$' trùng với $\overline{A_2}$.

$\overline{A_2}$' : Trong một tứ giác ghềnh, tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo cộng với bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo.

Phải chăng đến đây là hết? Xin xem bài sau sẽ rõ.

Bài 4. Như một trò ảo thuật

(Trích từ báo *Khoa học và đời sống*, ngày 1-4-1984)

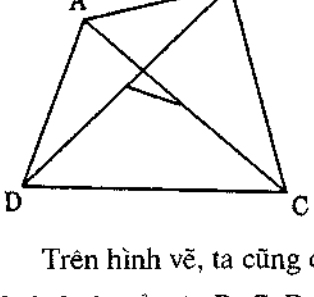
Trong các bài trước, ta đã từ một nhận xét nhỏ đưa ra được một loạt định lí như một nhà ảo thuật lôi ra từ nắm tay nhỏ bé của mình rất nhiều đồ vật.

Chưa hết đâu, nhà ảo thuật còn lắm tài. Hãy trở lại tính chất $\overline{A_2}$: Trong tứ giác, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo cộng với bốn lần bình phương đoạn thẳng nối hai trung điểm hai đường chéo.

Trong $\overline{A_2}$, ta ngầm nói rằng tứ giác phải phẳng và lồi. Vì sao? Vì ta khái quát được từ tính chất tương ứng A_2 trong hình bình hành mà hình bình hành là một tứ giác phẳng và lồi. Vậy thì $\overline{A_2}$ có còn đúng đối với tứ giác lõm, tứ giác chéo không? Trong bài "Hãy đi xa hơn nữa", ta đã thấy nó đúng với tứ giác ghềnh. Nhưng giới hạn của một tứ giác ghềnh khi một đỉnh chuyển động liên tục tiến về nằm trong mặt phẳng của ba đỉnh kia là một tứ giác phẳng kiểu gì? Rõ ràng là tứ giác phẳng kiểu này có thể lồi, lõm hoặc chéo. Cho nên $\overline{A_2}$ đúng với tứ giác ghềnh thì cũng đúng với một kiểu tứ giác phẳng. Hơn nữa $\overline{A_2}$ cũng đúng cả đối với các tứ giác không thật sự là tứ giác (có ba hay bốn đỉnh thẳng hàng, có hai đỉnh kề trùng nhau, có hai đỉnh đối diện trùng nhau) vì khi một tứ giác không thật sự thì các cạnh và các đường chéo thay đổi một cách liên tục và giữ vững mối quan hệ giữa chúng theo $\overline{A_2}$.

Cho nên, hễ có bốn điểm bất kì trong mặt phẳng hay trong không gian, ta có đến mấy cách viết tính chất $\overline{A_2}$ vì bốn điểm cho ta đến mấy tứ giác, chứ không phải chỉ một tứ giác. Chẳng hạn, với bốn điểm A, B, C, D ta có tứ giác lồi ABCD và hai tứ giác chéo ABDC và ADBC. Áp dụng $\overline{A_2}$ vào cho hai tứ giác

chéo này ta được hai đẳng thức mà khi cộng vế với vế, ta được định lí: *Trong một tứ giác, tổng bình phương hai đường chéo bằng hai lần tổng bình phương hai đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện.*



Trên hình vẽ, ta cũng có đến mấy tứ giác dẹt. Nếu a, b, c, d là hoành độ của A, B, C, D trên trục số AB thì áp dụng $\overline{A_2}$ vào cho tứ giác dẹt ABCD ta có ngay hằng đẳng thức:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=$$

$$=(a-c)^2+(b-d)^2+4\left(\frac{a+c}{2}-\frac{b+d}{2}\right)^2.$$

Trong đó a, b, c, d là bốn số thực bất kì, hay:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=$$

$$=(a-c)^2+(b-d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2-2(a+c)(b+d).$$

Nếu xét các tứ giác dẹt khác, ta lại có những hằng đẳng thức tương ứng.

Còn nếu áp dụng $\overline{A_2}$ vào tứ giác ABCD trong đó B trùng với A thì ta tìm lại được tính chất về đường trung bình trong một tam giác. Còn nếu cho C trùng với B thì ta được biểu thức về đường trung tuyến theo các cạnh của một tam giác. Cả hai định

lí về đường trung bình và đường trung tuyến đã từ $\overline{A_2}$ mà ra bằng cách cho A dẫn tới B hoặc tới C. Vậy cả hai định lí này, tuy bề ngoài rất khác nhau lại là anh em ruột vì cùng một mẹ là $\overline{A_2}$ sinh ra. Hai định lí đó không cho ta thêm kiến thức mới nhưng ta lớn lên về văn hóa toán học khi mà, nhờ tư duy sâu sắc, ta phát hiện ra chúng là anh em ruột.

Các bạn thấy không? Chỉ với những kiến thức sơ sài của toán phổ thông, với tư tưởng tiến công và với lập luận biện chứng, kết hợp với cách lập luận lôgic thông thường, chúng ta đã trở nên những nhà ảo thuật, từ một tính chất rất đơn giản của hình thoi rút ra nhiều thứ.

Mặc dù nhà ảo thuật còn lắm trò hay, buổi biểu diễn đã quá dài, xin tạm dừng và hẹn dịp khác. Xin kết thúc bằng hai câu "tập Kiều":

Toán yêu góp mặt sơ sài,
Mua vui cũng được mấy bài hay hay.

Ví dụ 3

Sự phát minh ra hình học siêu Ơ-clít

Trong toán học, người ta nói rằng giữa n biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ có liên hệ đối lập I_n^{n-p} (k) nếu có một hệ p phương trình đại số ($p < n$) đối xứng đối với các biến số và cùng bậc k đối với từng biến số:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Khi k = 1 thì phép đối hợp sẽ gọi là tuyến tính; khi đó, đáng lẽ viết I_n^{n-p} (1) thì người ta viết đơn giản I_n^{n-p} và cũng

không cần nói "tuyến tính" thì cũng ngầm hiểu đó là phép đối hợp tuyến tính.

Với $I_2^1(k)$ và $k > 1$ thì vấn đề đã trở nên phức tạp và để nghiên cứu thuận lợi, người ta đưa vào một khái niệm gọi là khoảng cách giữa hai cặp số. Nhưng với $n > 2$, tức là khi xét phép đối hợp từ bộ ba biến số trở lên thì phương pháp "khoảng cách" nói trên không dùng được bởi lẽ người ta không mở rộng được khái niệm khoảng cách giữa hai cặp số lên thành khái niệm khoảng cách giữa hai bộ n số với $n \geq 3$. Trong toán học cũng đã có những trường hợp tương tự. Ví dụ, đối với việc giải các phương trình đại số bậc lớn hơn 4 thì phương trình nói chung không còn có thể giải được bằng căn thức (định lí Abel), nghĩa là có mâu thuẫn giữa hai trường hợp $n \leq 4$ và $n > 4$. Sau đó Ga-loa đã thống nhất được mâu thuẫn trên bằng lí thuyết Ga-loa. Cho nên, gặp trường hợp nói trên về khoảng cách giữa hai bộ n số, tôi tin rằng mâu thuẫn giữa trường hợp $n = 2$ và $n > 2$ thế nào cũng có cách để thống nhất; chính thế giới quan duy vật biện chứng giữ cho tôi niềm tin để kiên trì tìm tòi sự thống nhất đó mặc dù đây là một khó khăn mà những nhà toán học trước tôi chưa giải quyết được. Rồi chính tư duy biện chứng chỉ đường cho tôi tìm được sự thống nhất. Đó là mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng mà ở đâu trong toán học ta cũng gặp: một cái chung, đem đặc biệt hóa theo nhiều cách khác nhau thì cho nhiều cái riêng khác nhau; một cái riêng, nhìn theo những quan điểm khác nhau thì sẽ khái quát nên thành những cái chung khác nhau. Ví dụ hình bình hành đem đặc biệt hóa bằng cách cho hai cạnh kề bằng nhau thì cho ta hình thoi, còn bằng cách cho hai góc kề bằng nhau thì cho ta hình chữ nhật; một tam giác nếu nhìn đó là một tứ giác có một cạnh bằng không thì định lí về đường trung bình có thể khái quát thành định lí: "trong một tứ giác tổng bình phương của bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo

cộng với bốn lần bình phương đoạn nối hai trung điểm của hai đường chéo", còn nếu nhìn đó là một tứ giác có một góc bằng 180° thì định lí về tổng các góc của một tam giác bằng 180° sẽ khái quát thành định lí về tổng các góc của một tứ giác bằng 360°. Như vậy, nếu gặp bế tắc trong sự khái quát hóa thì tư duy biện chứng chỉ cho chúng ta một hướng tìm tòi, đó là việc tìm cho được những cách nhìn mới về cái riêng đã biết, hi vọng sẽ tìm thấy một cách nhìn cho phép khái quát hóa trót lọt. Trở lại các phép đối hợp. Trong trường hợp n = 2 thì chỉ có thể là p = 1. Các phép đối hợp I_2^1 (n = 2), p = 1, k = 1) có dạng:

$$axx' + b(x + x') + c = 0$$

Ta sẽ coi x, x' như là hoành độ các điểm trên một trục số. [Nếu có một điểm x_0 sao cho $x'_0 = x_0$ gọi là một điểm kép của phép I_2^1. Phép I_2^1 có hai điểm kép thực, trùng nhau hoặc ảo liên hợp tùy theo $b^2 - ac > 0$, $b^2 - ac = 0$] hay $b^2 - ac < 0$. Người ta chứng minh rằng bất cứ hai điểm tương ứng x, x' nào cũng chia điều hòa hai điểm kép. Thực chất của I_2^1 là một sự liên hợp điều hòa đối với hai điểm kép.

Để nghiên cứu các $I_2^1(k)$, người ta đưa ra khái niệm khoảng cách giữa hai cặp điểm (f, g) và (r, s) như sau: cho một điểm m, ta lấy điểm m' liên hợp điều hòa của m đối với (p, q) tức m' tương ứng với m trong phép I_2^1 nhận p, q làm điểm kép. Sau đó lại lấy m'' liên hợp điều hòa của m' đối với r, s. Thế thì ta có phép biến đổi m thành m''. Đó là một phép biến đổi phân tuyến; người ta chứng minh rằng nó có một hằng số không phụ thuộc vào m và người ta dùng hằng số đó để định nghĩa khoảng cách giữa (p, q) và (r, s). Việc mở rộng khoảng cách này với n > 2 gặp khó khăn như sau. Để cho đơn giản, ta xét trường hợp n = 3.

Với n = 3, p có thể bằng 1 hoặc 2, tức là ta có I_3^2 và I_3^1 theo thứ tự có các phương trình dạng:

$$I_3^2 : axx'x'' + b(xx' + x'x'' + x''x) + c(x + x' + x'') + d = 0 \quad (2)$$

Đối với I_3^1 :

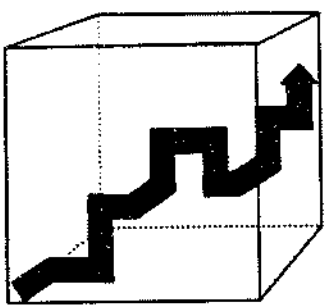
$$\begin{cases} a_1xx'x'' + b_1(xx' + x'x'' + x''x) + c_1(x + x' + x'') + d_1 = 0 & (3_1) \\ a_2xx'x'' + b_2(xx' + x'x'' + x''x) + c_2(x + x' + x'') + d_2 = 0 & (3_2) \end{cases}$$

Không thể bắt trước trường hợp n = 2. Quả vậy, giả sử cho hai bộ 3 số (o, p, q) và r, s, t). Ta xác định được hai phép I_3^1 và I_3^1 theo thứ tự nhận (o, p, q) và (r, s, t) làm các điểm tam trùng (cho x' = x'' = x). Nhưng cho m thì ta không có m' vì, trong (2) nếu cho x = m thì x', x'' không xác định mà biến thiên trong một liên kết dạng I_2^1. Đây chính là mâu thuẫn giữa trường hợp n = 2 và n = 3 và dĩ nhiên với m > 3 thì mâu thuẫn càng nổi bật. Phải giàu trí tưởng tượng mới tìm ra một cách nhìn mới về trường hợp n = 2. Cho m thì m' hoàn toàn xác định, vậy có thể coi việc xác định m' là một liên hệ đối hợp đặc biệt I_1^0 được không, dù rằng n = 1 là vô lí vì nói đến liên hệ thì ít nhất phải có hai biến số (n = 2) và ít nhất một phương trình (p = 1). I_1^0 có nghĩa là chỉ có một ẩn số và một phương trình cho ẩn số đó một giá trị xác định. Thật vô nghĩa nhưng lịch sử toán học đã từng có những chuyện tương tự ví dụ như a^0 thật là vô nghĩa so với định nghĩa a^m là tích của m thừa số bằng a. Vậy I_1^0 có thể quy ước là cho một biến số (n = 1) với một giá trị nào đó của nó nhờ một

phương trình (p = 1). Quy ước như vậy thì trường hợp n = 2 có thể nhìn với con mắt như sau: cho m, ta có m'. Việc có giá trị m' được coi như ta có một I_1^0.

Với cách nhìn này, ta có thể xem trường hợp n = 3 như sau: Hai bộ ba (o, p, q) và (r, s, t) xác định hai liên hệ đối hợp I_3^1 và $'I_3^1$ theo thứ tự nhận chúng làm bộ các điểm tam trùng. Cho x = m vào I_3^1 ta có một I_2^1 giữa x' và x''. I_2^1 này có hai điểm kép m_1' và m_2'. Cho $x = m_1'$ và $x' = m_2'$ vào $I_3^{1'}$, ta tìm được giá trị x''. Như vậy ta cũng có phép biến đổi m thành m''. Sự mở rộng tiếp đó cho các trường hợp n > 3 chả còn gì khó khăn. Thế là tôi giải quyết được mâu thuẫn giữa trường hợp n = 2 và n > 2. Khi đã xác định được "khoảng cách" giữa hai bộ số thì tập hợp tất cả các bộ n số biến thành một không gian rất kì lạ. Không gian này trở thành một công cụ mới giúp tôi tìm tòi trong lí thuyết đối hợp một lí thuyết đã được các nhà toán học trước tôi bỏ đi, xáo lại đến mức tưởng chừng như chẳng còn tìm ra được nhiều điều mới mẻ nhưng công cụ mới của tôi đã giúp tìm ra nhiều điều mới, trong đó có những điều có tầm vóc bao quát khá lớn. Đó là nội dung luận án tiến sĩ khoa học mà tôi đã viết xong bằng tiếng Pháp ở nhà, gửi sang Liên Xô đề nghị Viện Hàn lâm khoa học của Liên Xô từ tháng 4 đến tháng 6 năm 1963 và đã bảo vệ thắng lợi cuối đợt trao đổi đó. Nhưng thắng lợi không dừng ở đó, vì công cụ kì lạ trên, ngoài việc giúp nghiên cứu lí thuyết đối hợp, còn chứa rất nhiều tính chất lí thú khiến tôi phải suy nghĩ: chả lẽ nó đơn độc một mình, chắc chắn đây là ví dụ đầu tiên về một lớp không gian rộng lớn mà lâu nay toán học chưa biết. Vậy lí thuyết tổng quát về lớp không gian này là như thế nào? Đó là đề tài mới của tôi. Từ một ví dụ cụ thể đầu tiên mà khái quát nên thành cả

một lí thuyết là một điều cực kì khó khăn. Lại phải vận dụng mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng để tìm tòi. Nhưng chỉ độc có một cái riêng thì làm sao. Tôi đã cắt cái không gian của tôi bằng rất nhiều lát cắt (mỗi lát cắt như vậy chứa hình học cảm sinh cũng cùng kiểu với hình học xuất phát) và sau 6 năm gian khổ, đến 1969, tôi đã bước đầu xây dựng được lí thuyết mới mà tôi đặt tên là hình học siêu phi Ơ-clít.



Ví dụ 3 này có phần hơi khó hiểu nhưng không sao, miễn là độc giả thấy rằng quy luật sáng tạo là như nhau từ học sinh tiểu học đến nhà khoa học. Đã có quy luật thì có thể dạy được, học được, miễn sao chọn được cách dạy, cách học vừa sức người học. Trong sự sáng tạo đó, ngoài vai trò cốt lõi của tư duy biện chứng còn có vai trò trò của tư duy hình tượng. Chẳng hạn, để có thể nhìn cái riêng theo nhiều cách khác nhau thì phải có trí tưởng tượng rất dồi dào, càng dồi dào bao nhiêu càng mở ra nhiều hướng để khái quát. Cái đẹp cũng là một động lực thúc đẩy người ta nghiên cứu. Ví dụ, tôi thấy không gian cụ thể mà tôi tìm ra đầu tiên là rất đẹp và sự xúc cảm trước vẻ đẹp đó đã thúc đẩy tôi nghiên cứu để rồi từ đó khái quát nên hình học siêu phi Ơ-clít. Quá trình nghiên cứu ra một lí thuyết mới thường bắt đầu bằng sự tưởng tượng ra nó ở trong óc, sau đó điều tưởng tượng ban đầu biến thành đối tượng nghiên cứu để sửa sang, đục đẽo hoàn chỉnh dần cho đến khi lí thuyết hình thành một cách hoàn hảo, đẹp đẽ giống như nhà điêu khắc nhìn mẫu (nhưng mẫu đối với các nhà toán học là trong tưởng tượng) rồi đục dần tảng đá cho đến khi

nó phản ánh chân thực mẫu. Nói như trên không có nghĩa là các tư duy khác không có vai trò gì trong sáng tạo. Có thể nói như sau: tư duy biện chứng và tư duy hình tượng về cơ bản giữ vai trò phát hiện vấn đề và tìm phương hướng để giải quyết vấn đề còn tư duy lôgic và các tư duy khác về cơ bản đóng vai trò thiết kế và thi công theo phương hướng chỉ dẫn của hai tư duy trên. Nói "cơ bản" chứ không nói "tuyệt đối" vì cũng có những ngoại lệ.

Chương sáu

Một số ví dụ về nghiên cứu Toán học

1. Toán học ở quanh ta

Trước khi ứng dụng hãy tìm được phạm vi ứng dụng. Khoan hãy tìm ở đâu xa mà hãy tìm quanh ta. Hãy tưởng tượng là nghỉ hè đã đến. Cả một năm học miệt mài đèn sách, bây giờ cũng nên xả hơi một tí. Chả nhẽ "nghỉ hè" lại cứ vùi đầu vào sách vở, mẩu giấy với cây bút chì. Các bạn say mê toán lo gì! Toán ở quanh ta, ở khắp nơi vì đâu mà chẳng có những quan hệ số lượng, quan hệ hình dạng, quan hệ lôgic. Quanh năm, học lí thuyết ta có nói đến ứng dụng thì cũng là lí thuyết nốt. Có mấy khi cầm cái thước mà đo cụ thể, rồi tính toán cho ra chiều cao một cái cây cụ thể, một ngôi nhà cụ thể. Bây giờ nghỉ hè, dù nghỉ cách nào đi nữa thì cũng phải tăng cường tiếp xúc với thiên nhiên, với xã hội, vừa đi dưỡng tinh thần, vừa tò mò khoa học. Nào các chuyện đo đạc tính toán đã học trong lượng giác, nào chuyện trăng sao trên trời, nào chuyện mặt trời mọc, lặn với ngày dài, đêm ngắn. Nào chuyện giờ giấc, tốc độ, khoảng cách gắn với các phương tiện đi đường, ô tô, tàu hỏa, máy bay, v.v... Ngay cả những chuyện không đâu cũng có thể làm chúng ta động não. Sau đây xin kể một chuyện nhỏ ngày xưa của tôi. Hồi đó, hằng ngày đi học, tôi đọc trên một cột cây số thấy: Phủ Diễn

37. Tôi hiểu ngay, nếu từ cột đó đi tiếp 37 km nữa thì đi đến Phủ Diễn (tôi học ở Quốc học Vinh). Nhưng trên cột lại còn một số khác là 462 không thấy gắn với địa điểm nào. Tôi tự hỏi: "Số đó là số gì?". Chà! Bài toán xem ra đơn giản mà hóa ra lại khó vì chỉ độc có một dự kiện: 462. Lúc đầu tôi đành dùng cách "phi toán", nghĩa là đi hỏi. Hóa ra là tôi hay tò mò, còn xung quanh thì người ta mặc kệ. Thậm chí có người nói như mắng: "Mày chỉ vớ vẩn. Lo mà học đi. Số đó là gì mặc nó, liên can gì đến mày". Tôi không dám cãi lại nhưng trong bụng không chịu: "sao lại vớ vẩn! Tìm cho được bí mật về một số mà không phải là một cách học ư? Học như thế tốt quá đi chứ". Nhưng từ đó, tôi thôi cách làm "phi toán" đó. Và hằng ngày đi học, số 462 cứ xuất hiện trước mặt tôi như thách thức: "Này cậu học sinh kia ơi! Đố cậu biết tôi là ai?". Và thách thức hình như càng ngày càng ráo riết: "Sao? Cậu chịu rồi à? Xoàng thế". Hồi đó, tôi rất thích đọc tiểu thuyết trinh thám. Kẻ gian nằm im thì nhà chức trách thường bó tay, không tìm ra dấu vết. Kẻ gian hoạt động thì nhà chức trách mới lần theo dấu vết mà tìm ra chúng. Không ngờ việc đọc tiểu thuyết trinh thám lại làm nảy ra hướng giải quyết tìm bí mật số 462. Phải, lâu nay tôi chịu vì tôi nhìn số đó tĩnh tại, không hoạt động. Có chiếu đèn pha vào số đó cũng chịu không lần ra tung tích của nó. Phải tìm xem nó thay đổi như thế nào? Nghĩ vậy, một hôm tôi đi học sớm nửa giờ, đến cột "Phủ Diễn 37" thì không rẽ vào cổng trường mà đi thẳng một mạch đến cột tiếp theo: trên cột đề "Phủ Diễn 36" và số 461. Tôi như reo lên trong bụng: "Này, cậu số bí mật ơi! Tớ bắt đầu vén được tấm màn bí mật rồi. Này nhé! Đi ra Phủ Diễn bớt một ki-lô-mét thì cậu cũng bớt đi một đơn vị. Rõ ràng cậu cũng chỉ số ki-lô-mét từ cột đó đến cột địa điểm nào đó phía ngoài Phủ Diễn, nhưng khá xa. Hôm nay tớ còn chịu chưa biết đó là địa điểm nào. Nhưng cậu

phải biết, ở trường tớ còn học cả môn Địa lí nữa nhé. Hẹn cậu vài hôm nữa, tớ về tra sách địa lí: Vinh - Hà Nội thì có chưa đầy 300km. Vậy địa điểm đó còn xa hơn Hà Nội. Cuối cùng tôi tìm ra rằng địa điểm đó ở trên đường quốc lộ 1A, trên biên giới với Trung Quốc.

Sau này tôi mới ý thức được rằng bài toán tôi được giải là một bài toán về tìm một hàm số chưa biết. Không thể tìm ra một hàm số khi chỉ mới biết một giá trị của nó. Phải theo dõi sự biến thiên của nó đến một chừng mực nào đó mới có thể tìm ra nó. Càng học lên, tôi càng biết rằng toán học có cả một lĩnh vực đồ sộ về các loại phương trình trong đó ẩn không phải là các số mà là các hàm. Không ngờ tôi đã đụng phải việc tìm "hàm" ngay khi vừa mới bước vào lớp đầu cấp hai.

Câu chuyện nhỏ trên đây càng chứng tỏ "toán ở khắp nơi". Có thể có bạn cho rằng bài toán này quá dễ. Trong toán học, có ba cái khó: khó thứ nhất là "phát hiện ra vấn đề"; khó thứ hai là "tìm cách giải quyết vấn đề"; khó thứ ba là "giải quyết vấn đề". Tại sao người khác không tò mò muốn biết số 462 là số gì? Có được óc tò mò như vậy thì mới có vấn đề mà giải quyết. Đó là một cái khó. Có vấn đề rồi, định hướng giải quyết nó như thế nào? Nảy ra được ý nghĩ theo dõi sự biến thiên để tìm ra số cũng không phải là việc dễ ở một học sinh đầu cấp hai.

Học toán nghĩa là phải học cả cách phát hiện vấn đề, cách định hướng giải quyết vấn đề và cuối cùng là giải quyết vấn đề. Nghỉ hè, đi nghỉ, đi chơi đây đó, tha hồ cho các bạn học cả ba cách và bạn càng thấy "toán khắp mọi nơi, toán ở quanh ta". Ta có thể học toán trên lớp, trong sách vở, nhưng cũng có thể học toán "mọi lúc, mọi nơi". Hai cách học bổ sung cho nhau.

Bây giờ ta hãy làm quen với một cách tìm tòi đơn giản: làm thực nghiệm. Toán học không chấp nhận chứng minh bằng

thực nghiệm nhưng khuyến khích tìm tòi bằng thực nghiệm, rồi chứng minh bằng suy diễn.

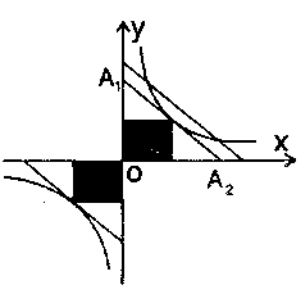
2. Thực nghiệm toán học để tìm tòi

Toán học thường được coi là một khoa học suy diễn, trong lúc các khoa học như Vật lí, Hóa học v.v..., được gọi là những khoa thực nghiệm. Nay nói đến thực nghiệm toán học, phải chăng đó là một điều trái ngược. Ở đây phải phân biệt "toán học đã hình thành" và "toán học đương trong giai đoạn tìm tòi". Ở trường, người ta dạy cho học sinh một "toán học đã hình thành", định lí nọ tiếp nối định lí kia bằng những suy diễn lôgic rất chặt chẽ. Không ai chấp nhận dùng các thực nghiệm để thay thế cho một chứng minh. Toán học hiện ra dưới mắt học sinh như một khoa học toàn dùng suy diễn. Có điều là học sinh học hết định lí này sang định lí khác mà không hiểu được người ta đã làm như thế nào để phát minh ra các định lí đó. Các chứng minh mà sách giáo khoa hay thầy giáo trình bày cho học sinh chỉ có tác dụng làm cho học sinh tin rằng các định lí đó là đúng. Cả một mảng lớn lao động trí óc dùng để phát hiện ra các định lí hoàn toàn xa lạ với học sinh. Phải chăng loại lao động trí óc đó là quá khó đối với học sinh? - Không hẳn như vậy. Có những cái khó "thực chất", và có những cái khó "định kiến": cứ định kiến cho là khó, không dám xông vào. Cứ thế mãi mãi cho là "quá khó", không dám mơ tưởng đến. Trong việc tìm tòi các định lí, cũng có những cái khó "thực chất", vượt quá xa trình độ lao động trí óc của đại trà học sinh, nhưng cũng có những khó khăn "định kiến". Ví dụ như việc dùng thực nghiệm toán học, không phải để chứng minh, mà để tìm tòi, phát hiện. Nghĩa là học sinh có thể tính toán hoặc vẽ hình (chính xác) cho nhiều trường hợp cụ thể, rồi từ đó mà dự đoán có định lí nọ, có định lí kia. Ví dụ, sau khi tính toán cụ thể: $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$,

học sinh có thể dự đoán rằng tổng của n số lẻ đầu tiên bằng n^2 (và tìm cách chứng minh); hoặc sau khi dựng ra nhiều vị trí của một điểm M di động, học sinh có thể dự đoán xem tập hợp các điểm M đó là đường gì. Ngày xưa, khi còn là một học sinh, tôi đã từng làm như vậy nhưng nhiều khi cũng phải đấu tranh bản thân để khỏi nản lòng. Vì ngồi mà tính toán cụ thể hay vẽ hình cụ thể thật chính xác, nhiều khi cũng mất rất nhiều thời gian. Ngày nay các bạn rất sung sướng vì máy tính điện tử đã được sử dụng đại trà ở các trường phổ thông. Các bạn có thể vẽ các hình toán học vừa rất nhanh, chính xác, rồi quan sát mà dự đoán định lí. Sau đây ta hãy thử dùng cách đó để tìm tòi các tính chất của đường cong $y = \frac{a}{x}$. Dĩ nhiên, trong quá trình tìm tòi, nếu ta có thể dùng trí tuệ thay cho thực nghiệm thì chả tội gì mà thực nghiệm. Thử nghiệm, có máy tính thì tốt, không có thì cứ chịu khó dùng thước, compa vẽ tay cho chính xác. Trước hết, chưa thực nghiệm gì, cũng có thể thấy ngay rằng:

1. *Nếu từ một điểm trên đường* $y = \frac{a}{x}$, *ta hạ các đường vuông góc xuống hai trục tọa độ thì hai đường này và hai trục tọa độ tạo nên một hình chữ nhật diện tích không đổi a.*

Bây giờ ta hãy dựng nhiều tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{a}{x}$, rồi quan sát. Kết quả quan sát làm nẩy sinh nghi vấn khoa học sau đây: phải chăng hai trục tọa độ cắt tiếp tuyến thành một đoạn thẳng nhận tiếp điểm là trung điểm? Ta thử chứng



minh. Ta sẽ xem một tiếp tuyến như trường hợp giới hạn của một cát tuyến $y = mx + n$ cắt đường cong $y = \frac{a}{x}$ tại hai điểm trùng nhau. Hai giao điểm của hai đường $y = \frac{a}{x}$ và $y = mx + n$, có hoành độ thỏa mãn phương trình: $\frac{a}{x} = mx + n$

hay: $mx^2 + nx - a = 0$ (1)

sẽ có nghiệm kép khi $\Delta = n^2 + 4am = 0$

$$m = -\frac{n^2}{4a} \quad (2)$$

khi đó nghiệm kép là $x = -\frac{n}{m}$ (3)

Như vậy, với điều kiện (2) thì $y = mx + n$ là tiếp tuyến tại điểm M có hoành độ (3). Tiếp tuyến này cắt Ox ở điểm A_1 có hoành độ $x_1 = -\frac{n}{m}$ và cắt Oy ở điểm A_2 có hoành độ $x_2 = 0$. Ta có $x = (x_1 + x_2) / 2$. Vậy M là trung điểm của A_1A_2.

Ta có định lí:

2. *Hai trục tọa độ cắt mọi tiếp tuyến của đường cong* $y = \frac{a}{x}$ *thành một đoạn thẳng nhận tiếp điểm làm trung điểm.*

Kết hợp hai tính chất (1) và (2), ta thấy ngay tính chất sau đây mà chẳng phải thực nghiệm gì:

3. *Một tiếp tuyến của đường cong* $y = \frac{a}{x}$ *tạo với hai trục*

tọa độ tam giác vuông có diện tích không đổi 2a.

Vì tiếp tuyến là giới hạn của một cát tuyến nên tính chất (2) lại gợi ra nghi vấn khoa học sau đây (mà không cần có thực nghiệm gợi ý, chỉ cần coi tiếp tuyến M như là trung điểm của đoạn *M*M, có hai đầu mút trùng nhau ở M): phải chăng đường cong $y = \frac{a}{x}$ và hai trục tọa độ cắt mỗi cát tuyến của đường cong, thành hai đoạn thẳng có chung trung điểm. Để chứng minh, ta trở lại phương trình (1) nhưng ở đây không có điều kiện (2): nửa tổng của hai nghiệm bằng $-\frac{n}{2m}$. Đó là hoành độ trung điểm của dây cung (đường $y = \frac{a}{x}$) nằm trên đường thẳng $y = mx + n$. Đó *cũng chính là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng tạo nên trên đường thẳng* $y = mx + n$ *bởi hai trục tọa độ*. Vậy:

4. Đường cong $y = \frac{a}{x}$ và hai trục tọa độ cắt mọi cát tuyến thành hai đoạn thẳng có chung trung điểm.

Từ đây sẽ suy ra:

5. Quỹ tích trung điểm của tất cả các dây cung (của đường cong $y = \frac{a}{x}$) có phương cho trước là một đường thẳng bớt đi đoạn thẳng nằm giữa hai tiếp tuyến có phương đã cho (nếu hai tiếp tuyến này tồn tại).

Bây giờ bạn thử dựng nhiều tam giác nội tiếp trong đường cong $y = \frac{a}{x}$ cùng với các điểm đặc biệt của chúng (tâm đường

tròn nội tiếp, ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm). Quan sát kĩ, bạn sẽ có nghi vấn sau đây: phải chăng mọi tam giác nội tiếp đường cong $y = \frac{a}{x}$ đều có trực tâm nằm trên đường đó? Ta thử chứng minh xem: giả sử ta có tam giác PQR với $P\left(p, \frac{a}{p}\right)$, $R\left(r, \frac{a}{r}\right)$, $Q\left(q, \frac{a}{q}\right)$. Đường cao đi qua P có phương trình:

$$\frac{y - \frac{a}{p}}{x - p} = -\frac{q - r}{\frac{a}{q} - \frac{a}{r}}$$

hay $y = ((rq)/a)x + (a^2 - p^2qr)/(ap)$ (4)

Hoán vị vòng quanh *p, q, r* ta sẽ có phương trình đường cao đi qua *Q* là:

$$y = ((pr)/a)x + (a^2 - q^2rp)aq \quad (5)$$

Giải hệ đó ra, ta có:

$$x = -a^2/pqr,\ y = -pqr/a.$$

Quả là $y = \frac{a}{x}$. Vậy, ta có định lí:

6. *Mọi tam giác nội tiếp đường cong* $y = \frac{a}{x}$ *đều có trực tâm nằm trên đường đó.*

Xin hãy tạm dừng ở đây. Bạn thấy không? Dùng thực nghiệm (cũng khá đơn giản), kết hợp với những lập luận cũng rất đơn giản, tự bạn thấy ra được nhiều tính chất lí thú của đường

cong $y = \frac{a}{x}$, mà trước đây bạn có thể không ngờ tới. Thực nghiệm toán học, tuy không phải là cách duy nhất cũng không phải là cách quan trọng nhất để khám phá, tìm tòi những chân lí toán học mới (ít ra là mới đối với bạn), nhưng là một cách khá thích hợp với học sinh phổ thông. Xin bạn chớ coi thường.

Bây giờ hãy mở rộng sự mò mẫm, dự đoán ra ngoài phạm vi dùng thực nghiệm.

3. Hãy tập mò mẫm, dự đoán

Xin lấy ngay một ví dụ cụ thể và đơn giản: dạy và học định lí về tổng các góc trong tam giác. Theo lối truyền thụ một chiều thì thầy nêu định lí rồi chứng minh, trò theo dõi chứng minh, cố gắng hiểu, về nhà củng cố lại rồi ứng dụng làm bài tập. Nếu học tốt, trò sẽ nắm chắc được kiến thức mới, vận dụng được vào làm bài tập và năng lực suy diễn cũng được rèn luyện. Còn theo tinh thần ở các bài trước đây nên dạy và học như thế nào? Nên chăng, trước khi dạy đến định lí này, giáo viên giao cho mỗi học sinh về nhà chuẩn bị: mỗi em vẽ ra trong vở 5 tam giác tùy ý, đo các góc rồi cộng lại. Đến lớp, thầy gọi một em lên bảng trình bày kết quả và yêu cầu các em khác, đối chiếu với kết quả của mình: sẽ thấy cùng một điểm chung khá thú vị, đó là: 200 tam giác (giả sử lớp có 40 em) hình dạng, kích thước rất khác nhau, ấy thế mà tổng các góc của chúng lại suýt soát như nhau. Định lí ở đây không từ trên trời rơi xuống mà do các em tự tìm ra bằng quy nạp (rất ít dùng trong cách dạy "truyền thụ một chiều"), mò mẫm, dự đoán (trong trường hợp đơn giản này không phải mò mẫm nhiều). Đó là dạy theo phương châm "trao cho người khác kiến thức thì không bằng trao cho họ cách tìm ra kiến thức". Đừng nghĩ rằng "mò mẫm" thì có gì là "sáng tạo". Nhiều nhà khoa học lớn vẫn

phải dùng đến nó. Không dạy "mò mẫm" thì người thông minh nhiều khi phải chịu bó tay chỉ vì không nghĩ đến hoặc không biết "mò mẫm". Tôi đã có một thời gian ra đề thi và chấm thi vào đại học. Tôi thấy rằng nhiều học sinh có tổng số điểm cao nhưng lại phải bó tay trước một câu về quỹ tích: bài ra đòi hỏi tìm quỹ tích của một điểm M mà không cho biết quỹ tích đó là hình gì; mà không biết nó là hình gì thì khó tìm ra phương hướng lời giải. Trong trường hợp này, có thể tìm xem quỹ tích là hình gì bằng quy nạp rất đơn giản: Vẽ thật chính xác vài vị trí của M; nếu thấy các vị trí đó thẳng hàng thì đoán được quỹ tích là đường thẳng, (hay đoạn thẳng), còn nếu không thì nó chỉ có thể là vòng tròn (hay cung tròn) vì ở phổ thông hồi đó, trong hình học phẳng, học sinh không được học gì khác ngoài đường thẳng và vòng tròn.

Nhưng lợi ích của cách dạy trên không chỉ có thế. Nó làm nổi rõ tương phản giữa "vạn biến" (được cụ thể hóa ra ở đây bằng 200 tam giác cụ thể khác nhau) và "bất biến" (tổng số góc). Theo cách dạy cũ thì "vạn biến" ẩn vào trong hai chữ "bất kì" (thầy nói: cho một tam giác bất kì ABC nhưng rồi thầy vẽ ra trên bảng chỉ một - chứ không phải 200 - tam giác cụ thể ABC và lướt nhanh qua hai chữ "bất kì", còn trò thì ở trạng thái tâm lí chờ để theo dõi chứng minh của thầy trên bảng, có chú ý gì đến hai chữ "bất kì"). Nhiều lần như thế, sự tương phản giữa "vạn biến" và "bất biến" sẽ in sâu vào tâm trí học sinh. Nhân dạy cho cao học mà người học là giáo viên toán phổ thông trung học, buổi gặp mặt đầu tiên, tôi ra bài: "Hãy dùng thực tiễn dạy toán của mình để bình luận câu: dĩ bất biến ứng vạn biến". Không ai làm được không phải vì bài khó, mà vì kiểu bài lạ hiếm thấy trong việc học toán và dạy toán của mỗi người. Chuyện "dễ" mà không rèn luyện sẽ hóa "khó" là như vậy.

Đi xa hơn, sẽ dẫn đến thế giới quan về sự thống nhất biện chứng giữa "biến đổi" và "không biến đổi" hay, nói một cách triết học hơn, giữa "vận động" và "đứng im": thế giới luôn luôn vận động, nhưng là vận động trong trật tự, nghĩa là có quy luật. Cái "vạn biến" là hiện tượng, cái "bất biến" là quy luật. Người có thế giới quan này thì nhìn vào cái "vạn biến" nào cũng tin rằng trong đó có cái bất biến và mong muốn tìm ra cái bất biến đó rồi ứng dụng nó để xử lí vạn biến: từ khi loài người phát hiện ra sự bất biến của tổng số góc của một tam giác thì đã có hàng tỉ người (trong đó có học sinh) dùng cái bất biến đó để giải hàng tỉ tỉ vấn đề thực tiễn cũng như lí luận (học sinh chủ yếu là giải bài tập). Thế giới quan này là một nội lực rất mạnh làm nền cho sự phát triển tư duy sáng tạo.

Nếu ta ví "thế giới quan" này như một bãi phù sa thì từng bài dạy kiểu như trên là một hạt cát. Phải tích lũy thường xuyên, liên tục, lâu dài thì bãi phù sa mới hình thành. Từ một bài dạy đến nhiều bài dạy về môn Toán, về tất cả các môn khác, đâu đâu cũng khắc sâu cái "bất biến" trong cái "vạn biến" thì hiệu quả theo hướng nêu trên mới chóng thành hiện thực.

Muốn sáng tạo, ta lại phải quen nhìn các khái niệm toán học dưới những góc độ khác nhau.

4. Nên tập nhìn các khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau

Một trong rất nhiều cách để rèn nếp tư duy sáng tạo qua việc học toán là tập nhìn một khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau. Xin minh họa bằng một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1

Khi giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ta chia cả hai vế cho a ($a \neq 0$) rồi tiến hành các phép biến đổi đi đến $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c = 0$ và cuối cùng được $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Nếu chỉ đặt ra yêu cầu "truyền thụ kiến thức" thì như vậy là được. Nhưng còn rèn nếp tư duy sáng tạo thì sao? Phải làm nổi bật lên những suy nghĩ "ẩn náu" rồi kích thích học sinh suy nghĩ tiếp: Nhằm mục đích gì mà chia cho a? Để có x^2 rồi làm xuất hiện bình phương một nhị thức chứa x.

Tại sao có thể làm được như vậy? Vì vế sau là 0 và ta có quyền chia cả hai vế cho số $a \neq 0$. Cần thấy hướng giải bài toán là đưa $ax^2 + bx + c = 0$ về dạng đơn giản $x^2 = A \Rightarrow x = \pm\sqrt{A}$ (với $A \geq 0$). Đến đây nên có những suy nghĩ mới mà lâu nay sách ít nói đến: Để đạt được ý tưởng trên có thể làm cách khác mà không cần chia cho *a*? Có thể nhân với a thành $a^2x^2 + abx + ac = 0 \Rightarrow \left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4}$ v.v...

Sáng kiến này lại kích thích suy nghĩ mới, chẳng hạn, nếu $a > 0$ thì có thể nhìn vế thứ nhất dưới dạng $(\sqrt{ax})^2 + bx + c$ dẫn đến $\left(\sqrt{ax}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$, còn nếu $a < 0$ thì lại đổi vế

thứ nhất thành dạng $-ax^2 - bx - c$, rồi có:

$$\left(\sqrt{-ax} + \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} - c = 0$$

Làm như vậy được lợi gì? Tư duy người học bớt cứng nhắc.

Ví dụ 2

Học định lí trong một hình thoi hai đường chéo vuông góc với nhau. Nếu mục đích chỉ là để có kiến thức thì cần nêu định lí đó lên, chứng minh nó, sau đó là bài tập ứng dụng. Nhưng muốn rèn luyện trí thông minh sáng tạo thì có thể tự hỏi như sau: (có thể cần có sự gợi ý khéo léo của thầy):

- Hai đường chéo của hình bình hành (không phải hình thoi) có vuông góc với nhau không?

- Không.

- Có vẻ như ngược đời vì hình bình hành tổng quát hơn hình thoi, phải không?

- Thử xem trong hình thoi, các đường chéo còn có thể xem là đường gì?

Học sinh thấy rằng (có thể thầy cần gợi ý) các đường chéo của hình thoi còn có thể xem là các đường phân giác của góc để đi đến bài toán giao cho họ về nhà làm: xem xét các đường phân giác của các góc trong một hình bình hành. Bài này không khó. Những học sinh khá, giỏi sẽ hứng thú tự mở rộng bài toán ra (ví dụ cho một tứ giác bất kì) hoặc xét nó trong một trường hợp đặc biệt (hình chữ nhật).

Lâu nay, học sinh thường được luyện đi tìm thủ thuật để giải những bài toán khó. Việc đi tìm những thủ thuật đó cũng có ích, nhưng hạn chế, bởi lẽ những thủ thuật đó dường như phân

tán, tản mạn, mỗi kiểu bài đòi hỏi một thủ thuật riêng. Hơn nữa, một thủ thuật ít tạo ra năng lực "phát hiện vấn đề mới". Mà "sáng tạo" phải bắt đầu từ chỗ "phát hiện ra vấn đề" rồi sau đó "giải quyết vấn đề". Nếu hạn chế về năng lực phát hiện vấn đề thì đành phải thụ động ngồi chờ người khác phát hiện vấn đề cho mà giải quyết, cụ thể, đối với học sinh là phải ngồi chờ thầy (hay sách) ra bài cho mà làm, làm hết các bài đó lại ngồi chờ.

Tập nhìn một khái niệm toán học theo nhiều cách khác nhau là một cách để nâng cao năng lực phát hiện vấn đề. Rèn luyện lâu sẽ hình thành thế giới quan: "mâu thuẫn là động lực của sự phát triển" và ở đây có những mâu thuẫn như giữa nội dung và hình thức, (như một phương trình có thể diễn tả bằng nhiều hình thức khác nhau); giữa cái chung và cái riêng (như hình bình hành và hình thoi) v.v... Việc ta có thể nhìn một khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau có nguồn gốc sâu xa từ thế giới quan nói trên. Tập nhìn một khái niệm dưới nhiều cách khác nhau chính là vừa rèn luyện tư duy sáng tạo, vừa giáo dục thế giới quan. Nhưng phải kiên trì, bền bỉ, liên tục mới có hiệu quả rõ rệt giống như tập thể dục phải kiên nhẫn, bền bỉ, liên tục hàng năm mới khỏe mạnh. Nào, bây giờ ta hãy làm quen với một kiểu đề toán mà học sinh chưa hề gặp ở trường.

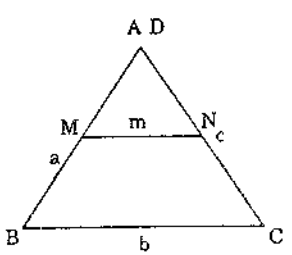
5. Một kiểu đề toán mới

Từ trước đến nay, học sinh đã quá quen với những đề toán trong đó phải chứng minh tính chất này hay tính chất nọ. Những đề toán khó là những đề mà ở đó mối liên hệ lôgic giữa giả thiết và kết luận rất khó thấy. Làm được một bài toán khó rất hứng thú, nhưng dù sao bạn vẫn chưa phải là người phát minh ra cái mới (dù chỉ là mới đối với bạn thôi) vì tính chất phải chứng minh lại do tác giả đề toán ra còn người làm toán thì hoàn toàn không

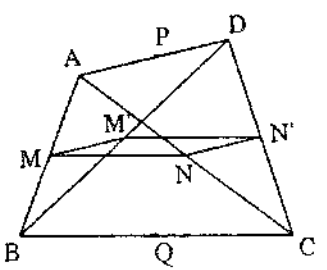
biết người ta đã làm cách gì mà phát hiện ra tính chất đó. Vì vậy, dù có làm đến hàng trăm, hàng nghìn đề toán cực khó theo kiểu trên, học sinh cũng chỉ mới được rèn luyện khả năng "giải quyết vấn đề" (do người khác nêu ra), chưa được rèn luyện khả năng "phát hiện vấn đề". Muốn trở thành nhà khoa học nói chung, nhà toán học nói riêng, phải giỏi cả "phát hiện vấn đề" và "giải quyết vấn đề". Sau đây tôi sẽ nêu ra một số ví dụ cụ thể về một kiểu đề toán mới trong đó bạn đọc phải tìm tòi mới biết được phải chứng minh cái gì. Những đề toán kiểu này sẽ rèn cho các bạn khả năng "phát hiện vấn đề". Sau vài ví dụ chúng ta sẽ cùng nhau tổng kết về quy luật "phát minh toán học".

Đề toán 1

Hãy coi tam giác là một tứ giác đặc biệt có một cạnh triệt tiêu rồi dùng suy luận lôgic chặt chẽ để từ tính chất sau đây của tam giác: "đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bằng một nửa cạnh thứ ba", dự đoán sự mở rộng tính chất đó ra cho tứ giác. Sau khi dự đoán xong hãy chứng minh xem tứ giác có tính chất đó không.



Hình 1



Hình 2

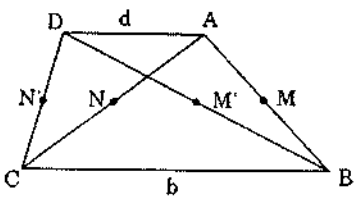
Lời giải

Ta coi tam giác ABC ở h.1 là giới hạn của tứ giác ABCD ở h.2 khi D đến trùng với A (làm cho d triệt tiêu). Ở hình 1, ta có:

$$m = \frac{b}{2} \qquad (1)$$

ta cố dự đoán hệ thức mở rộng của (1) khi D khác A, tức $d \neq 0$.

Khi D đến trùng với A thì M' đến trùng với M và N' đến trùng với N (M, N, M', N' theo thứ tự là trung điểm của AD, AC, DB, BC). Vậy đoạn MN trong h.1 có thể là giới hạn của M', N của MN', của M'N' ở h.2. Nhưng rõ ràng là $MN = M'N' = \frac{CD}{2}$ (h.2) và có thể coi đây là sự mở rộng hệ thức (1): tuy vậy, sự mở rộng này chả có gì thú vị. Bởi vậy ta sẽ chú ý đến $MN' = m_1$, và $M'N = m_2$.



Hình 3

Vì ở h.1, $d = 0$, nên ta cố gắng làm xuất hiện d ở hệ thức (1) như sau:

$$m = \frac{(b \pm 0)}{2} = \frac{(b \pm d)}{2}.$$

Ở h.2, nếu ABCD là hình thang với đáy là AD, BC (h.3) thì quả là $m_1 = \frac{(b+d)}{2}$, $m_2 = \frac{b-d}{2}$ nhưng ta thấy ngay nếu ABCD là một hình thang cân có đáy là AB, CD thì:

$$m_1 = MN' \neq \frac{b-d}{2} \quad (\text{vì } \frac{(b+d)}{2} = b = d)$$

và $m_2 = M'N \neq \frac{b-d}{2}$ (vì $b - d = 0$).

Vậy $m = \frac{b \pm d}{2}$ không thể là sự mở rộng của (1).

Có người có thể nghĩ rằng: biết đâu d chẳng tham gia vào công thức mở rộng với một hệ số k nào đó, nghĩa là

$$m = (b + dk) / 2 \qquad (2)$$

Nhưng nếu hệ thức (2) này quả là đúng, thì khi đem áp dụng nó vào cho hình thang mà đáy là AD và BC ta sẽ thấy rằng k bắt buộc phải là ± 1.

Như vậy, công thức mở rộng của (1) không thể có dạng (2). Ta đi tìm hướng khác. Ở (1) và (2), các đoạn thẳng *m, b, d* đều tham gia ở bậc nhất. Ta nghĩ tới bậc 2 vì trong các hệ thức lượng quen thuộc, phần lớn các đoạn thẳng đều tham gia vào những số hạng bậc 2.

Bởi vậy, ta sẽ viết (1) dưới dạng bậc hai:

$$m^2 = b^2 / 4$$

Vì ở h.1 do d = 0 nên ta dễ có khuynh hướng nghĩ rằng sẽ có hệ thức:

$$m^2 = (b^2 \pm d^2) / 4$$

Nhưng $m^2 = (b^2 - d^2) / 4$ sẽ dẫn đến m = 0 khi b = d, điều mà ta đã thấy là không được, còn nếu $m^2 = (b^2 + d^2) / 4$ khi đem áp dụng vào hình vuông (ở đó m = b = d) thì thấy không đúng.

Vậy hướng mở rộng thứ hai này cũng bế tắc, còn hướng nào nữa? khi d = 0 thì DB = AB, DC = AC; bốn đoạn thẳng này khó lòng mà không tham gia vào hệ thức tổng quát vì, trừ những trường hợp đặc biệt, khó mà có một hệ thức chỉ giữa m và b, d. Dĩ nhiên, do tính thuần nhất của các hệ thức lượng, bốn đoạn trên sẽ tham gia ở bậc 2. Vì vậy, ta nghĩ đến các hiệu $DB^2 - AB^2$, $DC^2 - AC^2$ là

những biểu thức cũng sẽ triệt tiêu khi d = 0. Bởi vậy, ta nghĩ đến hai hệ thức theo thứ tự có dạng:

$$m = (b^2 + k_1d^2) / 4 + I_1(\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2) + I'_1(\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2) \quad (3)$$

$$m = (b^2 + k_2d^2) / 4 + I_2(\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2) + I'_1(\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2) \quad (4)$$

cả hai đều trở thành $m^2 = b^2 / 4$ khi D trùng với A.

Ta thử áp dụng (3) và (4) vào hình vuông ($b = d = m_1 = AB = CD$, $m_2 = 0$; $DB = AC = b\sqrt{2}$).

Ta được:

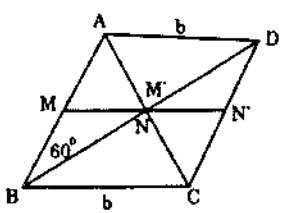
$b^2 = (b^2 + k_1b^2) / 4 + I_1(2b^2 - b^2) + I'_1(b^2 - 2b^2)$

$= b^2[(I + k_1) / 4 + I_1 - I'_1)]$ và $0 = b^2[(I + k_2) / 4 + I_2 - I'_2]$.

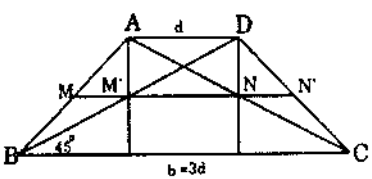
Lại thử áp dụng vào hình thoi có cạnh là b và có một góc 60° (h.4):

$b^2 = (b^2 + k_1b^2) / 4 + I_1(3b^2 - b^2) + I'_1(b^2 - b^2)$ và

$0 = (b^2 + k_2b^2) / 4 + I_2(3b^2 - b^2 - b^2) + I'_2(b^2 - b^2)$.



Hình 4



Hình 5

Cuối cùng ta thử áp dụng vào một hình thang cân có góc ở đáy dưới bằng 45° và chiều cao bằng đáy trên (h,5), ta được ($m_1 = 2d$, $m_2 = d$):

$4d^2 = (9d^2 + k_1d^2)/4 + I'_1(2d^2 - 5d^2) + I_1(5d^2 - 2d^2)$ và

$d^2 = (9d^2 + k_2d^2)/4 + I'_2(2d^2 - 5d^2) + I_2(5d^2 - 2d^2)$.

Từ trên, chúng ta rút ra hai hệ phương trình để tính k_1, I_1, I'_1 và k_2, I_2, I'_2:

$$\begin{cases} 0 = (1 + k_1)/4 + I_1 - I'_1 \\ 0 = (1 + k_1)/4 + 2I_1 \\ 1 = (9 + k_1)/4 + 3(I_1 - I'_1) \end{cases}$$

Và

$$\begin{cases} 0 = (1 + k_2)/4 + I_2 - I'_2 \\ 0 = (1 + k_2)/4 + 2I_2 \\ 1 = (9 + k_2)/4 + 3(I_2 - I'_2) \end{cases}$$

Giải hai hệ phương trình này, ta được:

$$I_1 = \frac{1}{4}, I'_1 = -\frac{1}{4}, k_1 = 1$$

$$I_2 = \frac{1}{4}, I'_2 = \frac{1}{4}, k_2 = 1.$$

Như vậy, ta dự đoán có hai hệ thức mở rộng hệ thức (1)

$$4m_1^2 = (b^2 + d^2) - (a^2 + c^2) + (e^2 + f^2) \qquad (5)$$

$$4m_2^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (e^2 + f^2) \qquad (6)$$

Ta có thể phát biểu hai hệ thức đó như sau:

- Trong một tứ giác lồi, bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đối diện nào đó bằng tổng bình phương hai đường chéo và hai cạnh đối diện còn lại, trừ đi tổng bình phương hai cạnh đối diện đã cho.

- Trong một tứ giác lồi, bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh trừ đi tổng bình phương hai đường chéo.

Chứng minh: MM'N'N là một hình bình hành vì MM'//NN' (cùng // AD) và MN // M'N' (cùng // BC) (h.2). Trong hình

bình hành đó MM' = NN' = d/2, MN = M'N' = b/2, MN' = m_1, M'N = m_2.

Áp dụng định lí: "*Trong một hình bình hành, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo*", ta có:

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{b^2 + d^2}{2} \qquad (7)$$

Nếu lại xét thêm hai trung điểm P, Q của AB và CD (h.2) và đặt PQ = n, thì, xét thêm hai hình bình hành PMQN' và PM'QN, ta lại có:

$$n^2 + m_1^2 = (e^2 + f^2) / 2$$

$$n^2 + m_2^2 = (a^2 + c^2 / 2$$

Trừ vế với vế, ta được:

$$m_1^2 - m_2^2 = \frac{e^2 + f^2}{2} - \frac{a^2 + c^2}{2} \qquad (8)$$

Cộng vế với vế (7) và (8) ta được (5) và trừ vế với vế ta được (6). Vậy quả (5) và (6) là sự mở rộng của (1) như ta đã dự đoán.

Chú ý: Nếu ta xét tứ giác chéo ADBC với hai đường chéo là AB và CD (h.2) thì (5) cũng có thể phát biểu: trong một tứ giác chéo, bốn lần bình phương đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh trừ đi tổng bình phương hai đường chéo. Cũng dễ thấy rằng: nếu là tứ giác lõm hay tứ giác ghềnh thì định lí sau đây đều đúng: *Trong một tứ giác (lồi, lõm, chéo, ghềnh) 4 lần tổng bình phương đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh trừ đi tổng bình phương hai đường chéo.*

Đề toán 2

Hãy mở rộng định lí: *"Trong một tam giác, ba trung tuyến đồng quy"*.

Lời giải

Ở đây, ta có ba khái niệm "tam giác", "trung tuyến" và "đồng quy" đều có thể mở rộng.

Tam giác có thể mở rộng ở trong mặt phẳng thành tứ giác (tam giác là một tứ giác đặc biệt, có một cạnh bằng không), ngũ giác (tam giác là một ngũ giác có hai cạnh bằng không), lục giác, v.v... Tam giác cũng có thể mở rộng ra trong không gian thành tứ diện, tam diện.

Trung tuyến có thể mở rộng ra theo nhiều cách tùy theo ta hiểu "trung điểm của một cạnh là thế nào". Một cạnh BC với trung điểm O có thể hiểu theo nhiều cách, ví dụ: O là tâm của quỹ tích những điểm cách đều O một đoạn bằng BC/2 (trên đường thẳng BC, quỹ tích đó gồm hai điểm B và C), hoặc O là trọng tâm của đoạn thẳng BC hoặc của tập hợp hai điểm B, C, hoặc O là liên hợp điều hòa của điểm vô tận (trên đường thẳng BC) đối với hai điểm B, C.

Còn đồng quy thì có thể mở rộng như thế nào? "không đồng quy" là trái ngược với "đồng quy" nhưng đồng thời cũng là sự mở rộng của "đồng quy". Sao vậy? Vì ba đường thẳng không đồng quy trong mặt phẳng thì tạo nên một tam giác có diện tích S (ta coi S trở nên vô tận khi hai trong ba đường song song với nhau). Khi S triệt tiêu thì ba đường đồng quy. Vậy "đồng quy" là trường hợp đặc biệt của "không đồng quy" khi S = 0.

Kết hợp các kiểu mở rộng khác nhau của ba khái niệm trên, ta thấy rằng định lí về ba trung tuyến đồng quy trong một

tam giác có rất nhiều hướng để mở rộng. Sau đây cũng không thể nêu hết các hướng mở rộng đó vì quá dài. Vì mục đích của loại đề toán này là để rèn luyện khả năng "phát hiện vấn đề" là chính, hơn việc rèn luyện khả năng "giải quyết vấn đề" nên sau đây cũng chỉ hạn chế ở việc nêu lên các nghi vấn khoa học mà không chứng minh xem các nghi vấn đó đúng hay sai.

Mở rộng tam giác thành đa giác: vì chỉ trong các đa giác có số cạnh lẻ mới có khái niệm "đỉnh và cạnh đối diện" và do đó mới có sự mở rộng khái niệm "trung tuyến" (đường nối một đỉnh với trung điểm của cạnh đối diện), nên ta có nghi vấn khoa học sau đây:

Trong một đa giác có số cạnh lẻ, các trung tuyến có đồng quy hay không? Nếu không phải trong trường hợp nào cũng đồng quy hãy xét xem trong những trường hợp đặc biệt nào thì có sự đồng quy.

Mở rộng tam giác thành tam diện ở trong không gian, rồi từ đó mở rộng ra các đa diện có số mặt lẻ, ở đây có các nghi vấn khoa học sau đây:

Trong một tam diện, ba mặt phẳng nối ba cạnh với phân giác của mặt đối diện có đồng quy hay không? Mở rộng ra để xem xét vấn đề với các đa diện có số mặt lẻ.

Mở rộng tam giác thành tứ diện: theo ba cách đầu để hiểu trung điểm O của đoạn BC (đã nói ở trên), thì có thể có các nghi vấn khoa học sau đây:

a) Trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh với tâm vòng tròn ngoại tiếp mặt đối diện có đồng quy hay không?

b) Trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh với trọng tâm các mặt đối diện có đồng quy hay không?

c) Trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh với trọng tâm của chu vi các mặt đối diện có đồng quy hay không?

Xem các trung điểm của các cạnh là điểm liên hợp điều hòa của các điểm ở vô tận đối với hai đầu cạnh. Trong trường hợp này, trước hết hãy xét ba điểm ở vô tận trên ba đường thẳng chứa ba cạnh. Vì chúng đều ở vô tận nên chúng đều nằm trên bất cứ mặt phẳng nào song song với mặt phẳng tam giác. Cũng có thể coi chúng là cùng nằm trên giao tuyến của mặt phẳng tam giác với một mặt phẳng song song. Cách nhìn này dẫn ta đến ý nghĩ rằng ba điểm đó là thẳng hàng, từ đó ta đi đến nghi vấn khoa học sau đây:

Cho một tam giác ABC với các cặp điểm D, D', E, E', và F, F' theo thứ tự trên ba đường thẳng BC, CA, AB và chia điều hòa các cặp điểm B, C; C, A và A, B. Phải chăng hễ D', E', F' thẳng hàng thì AD, BE, CF đồng quy. Phải chăng điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là nếu AD, BE, CF đồng quy thì D' E', F' thẳng hàng?

Mở rộng khái niệm đồng quy. Trong một tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF ta có:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$$

và ba trung tuyến tạo nên một tam giác có diện tích bằng không.

Từ đó ta có thể mở rộng định lí về trung tuyến đồng quy theo hai bước như sau:

Bước thứ nhất: mở rộng hạn chế.

Cho ba điểm D, E, F theo thứ tự trên ba đường thẳng BC, CA, AB chứa ba cạnh của một tam giác ABC, sao cho:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = K$$

(K là một số đại số cho trước). Hãy tính diện tích S (K) của tam giác tạo nên bởi ba đường thẳng AD, BE, CF theo K và theo diện tích của tam giác ABC, thử nghiệm rằng S(−1) = 0.

Bước thứ hai: mở rộng như trên nhưng với

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = K_1; \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = K_2; \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = K_3$$

K_1, K_2, K_3 là ba số đại số cho trước. Sau khi tìm được hàm số $S(K_1,K_2,K_3)$ hãy tính cụ thể K_1,K_2,K_3 trong trường hợp D, E, F là chân ba đường cao hay chân ba đường phân giác và thử nghiệm trong các trường hợp đó thì $S(K_1,K_2,K_3) = 0$.

Rõ ràng là từ một định lí rất quen thuộc, ta đã lôi ra được hàng loạt nghi vấn khoa học, phát hiện ra hàng loạt vấn đề để nghiên cứu.

Bạn đọc nên thử sức mình trước, sau đó hãy xem phần 6 để đối chiếu.

Đề toán 3

Giả thiết rằng chưa biết biểu thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Hãy mày mò, dự đoán ra biểu thức đó bằng cách khái quát từ các trường hợp đặc biệt khi a = 0, khi b = 0 và khi c = 0.

Lời giải

Khi a = 0, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm là

$x = \frac{-b}{c}$. Khi b = 0, ta có hai nghiệm là $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ và $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ (x_1, x_2 là ảo nếu $\frac{c}{a} > 0$).

Khi c = 0, ta có hai nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{a}{b}$. Từ những biểu thức của nghiệm trong ba trường hợp đặc biệt ở trên ta hãy thử mày mò, dự đoán ra biểu thức của nghiệm trong trường hợp tổng quát.

Trước hết, căn cứ vào trường hợp b = 0, ta thấy rằng biểu thức tổng quát phải chứa căn bậc hai của một biểu thức hữu tỉ f(a, b, c) nào đó của a, b, c và hai nghiệm khác nhau của phương trình sẽ ứng với hai dấu +, – đặt trước dấu căn; ngoài căn bậc hai đó, biểu thức tổng quát còn phải chứa một biểu thức hữu tỉ thứ hai g(a, b, c) vì, nếu không phương trình sẽ luôn luôn có hai nghiệm trái dấu. Vậy biểu thức tổng quát của các nghiệm có dạng:

$$x_1 = g(a, b, c) + \sqrt{f(a, b, c)}$$

$$x_2 = g(a, b, c) - \sqrt{f(a, b, c)}$$

Trong đó f và g là hai biểu thức hữu tỉ của a, b, c. Để xác định f và g, ta hãy vận dụng các biểu thức trên vào trường hợp b = 0; ta có ngay

$$g(a, 0, c) = 0 \qquad (1)$$

$$f(a, 0, c) = -\frac{c}{a} \qquad (2)$$

Sau đó, ta lại áp dụng vào trường hợp c = 0; ta được hoặc:

$$g(a, b, 0) + \sqrt{f(a, b, 0)} = -\frac{b}{a} \qquad (3)$$

$$g(a, b, 0) - \sqrt{f(a, b, 0)} = 0 \qquad (4)$$

hoặc:

$$g(a, b, 0) - \sqrt{f(a, b, 0)} = -\frac{b}{a} \qquad (3')$$

$$g(a, b, 0) + \sqrt{f(a, b, 0)} = 0 \qquad (4')$$

Từ đó:

$$g(a, b, 0) = -\frac{b}{2a} \qquad (5)$$

$$f(a, b, 0) = [g(a, b, 0)]^2 = \frac{b^2}{4a^2} \qquad (6)$$

Tóm lại, ta có hệ:

$$\begin{cases} g(a,0,c) = 0 \\ f(a,0,c) = -\dfrac{c}{a} \\ g(a,b,0) = -\dfrac{b}{2a} \\ f(a,b,0) = \dfrac{b^2}{4a^2} \end{cases}$$

Ta hãy xét biểu thức:

$$f(a, b, c) = f(a, 0, c) + f(a, b, 0) = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Thay b = 0, ta được

$$f(a, 0, c) = f(a, 0, c) + f(a, 0, 0) = -\frac{c}{a} + 0 = -\frac{c}{a}$$

Thay c = 0, ta được

$$f(a, b, 0) = f(a, 0, 0) + f(a, b, 0) = 0 + \frac{b^2}{4a^2}$$

Vậy hàm f(a, b, c) này thỏa mãn cả (2) và (6).

Cũng vậy, hàm:

$g(a, b, c) = g(a, 0, c) + g(a, b, 0) = 0 - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a}$ thỏa mãn cả (1) và (5).

Vậy, có hi vọng rằng biểu thức

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

là biểu thức của nghiệm phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Đến đây, ta có thể thử để thấy rằng đúng đó là hai nghiệm (một nghiệm ứng với dấu +, nghiệm kia ứng với dấu −) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Ngoài ra cũng không còn biểu thức nào khác vì phương trình chỉ có hai nghiệm.

Cần chú ý thêm là ta đã không cần vận dụng đến trường hợp đặc biệt a = 0. Tuy nhiên, có thể thử nghiệm để thấy ngay rằng nếu a = 0 thì một trong hai nghiệm trên trở nên vô tận còn nghiệm thứ hai đúng là trở thành −c/b.

Với ba đề toán như thế cũng đủ tạm kết luận rồi. Tôi nói "tạm" vì dù sao kết luận mà tôi sắp đưa ra cũng còn mang tính áp đặt, chưa hẳn bạn nào cũng đồng tình. Dù cho có mời các bạn đến một hội thảo khoa học để tranh luận thì cũng không hơn gì bao nhiêu vì ở các bạn còn cần thêm thực tiễn phát minh toán

học làm cơ sở cho sự đồng tình. Hiện nay chắc bạn chưa có hoặc có rất ít thực tiễn và bởi vậy tôi cũng bị hạn chế, chưa thể nói nhiều hơn, sâu hơn, "*tạm*" là vì vậy.

Có bạn tưởng rằng phát minh toán học phải là cái gì ghê gớm lắm, phải tìm ra được cái gì thật mới toanh, còn những điều đề cập đến trong bài báo trước và ở đây thì quá xoàng về hai phương diện: một mặt thì đó chỉ là những sự mở rộng, đâu có phải là phát minh, phát minh mới oai, chứ mở rộng thì xoàng, đã có cái gì rồi, nghĩ thêm chút ít thôi; mặt khác, sự mở rộng đó đưa đến những điều mới đối với một số người, nhưng là cũ kĩ đối với toán học.

Trước hết, xin nói ngay với các bạn rằng, không làm gì có cái "mới" tuyệt đối, cái mới không dính gì với cái cũ. Mọi phát minh khoa học, dù cho có độc đáo đến đâu, vĩ đại đến đâu, cũng đều bắt nguồn từ cái cũ, có kế thừa phần nào đó cái cũ, và bao giờ cũng là sự mở rộng cái cũ. Trong toán học, đã từng có những phát minh rất độc đáo, rất cách mạng như sự phát minh ra số ảo, số phức, sự phát minh ra hình học phi Ơ-clít mà lúc mới đầu, nhiều người cho là quái đản, thì cuối cùng đều là những sự mở rộng số phức; mở rộng số thực, hình học phi Ơ-clit mở rộng hình học Ơ-clít. Có thể nói một cách chắc chắn rằng mọi phát minh toán học đều là một sự mở rộng. Tập được mở rộng chính là tập được phát minh. Học sinh thì tập dượt còn nhà toán học thì mở rộng, phát minh thật sự. Mục đích có khác nhau, kết quả đưa đến, xét về mức độ mới mẻ và tầm quan trọng có khác nhau, nhưng những quy luật về phát minh, mở rộng thì vẫn là một. Ta hãy sơ bộ nêu lên những quy luật đó qua sự phân tích các đề toán I, II, III.

1) Cái mới (tức cái mở rộng) mà ta tìm kiếm bao giờ cũng có mặt trái ngược với cái cũ (tức cái đặc biệt) và có mặt thống nhất. Như ở bài 1, cái cũ $m = b/2$ đã được lần lượt nhìn dưới góc độ $m = (b \pm 0)/2$ để hi vọng đi đến cái mới là $m = (b \pm d)/2$

nhưng thất bại, sau đó lại được nhìn dưới góc độ $m^2 = (b^2 \pm 0)/4$ để hi vọng đi đến cái mới là $m = (b^2 \pm d^2)/4$ nhưng cũng thất bại nốt. Hai cách nhìn đó làm nổi lên mặt trái ngược giữa tam giác và tứ giác. Sau đó, ta lại phải tìm một cách nhìn mới bằng cách đưa vào các hiệu $DB^2 - AB^2$, $DC^2 - AC^2$ thì mới thành công và phát hiện ra cái mới, cũng chính là cái mở rộng, là hai hệ thức (5), (6) (xem bài số trước).

2) Một cái cũ có thể có nhiều cái mới tương ứng, nghĩa là có nhiều cách mở rộng. Tìm được bao nhiêu cách nhìn cái cũ đưa đến sự thành công trong sự mở rộng thì sẽ tìm ra bấy nhiêu cách mở rộng, nghĩa là bấy nhiêu cái mới. Điều này đặc biệt rõ trong đề toán II, ở đó ta đã có nhiều cách nhìn về "tam giác", về "trung tuyến", về "đồng quy" đưa đến nhiều hướng mở rộng. Trong bài đó ta không có thời gian để xét xem hướng mở rộng nào sẽ đưa đến thành công nhưng nếu các bạn chịu khó xem xét thì sẽ thấy trong số các hướng đó có nhiều hướng thành công cho nên định lí nêu ra có nhiều định lí mở rộng.

3) Phải tập dượt nhìn một khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau và nên cố gắng có những cách nhìn độc đáo. Ví dụ, nếu ta nhìn: "đồng quy" là "một đường đi qua giao điểm của hai đường kia" hay "giao điểm của hai đường nào đó nằm trên đường thứ ba", thì quả là khó mà mở rộng khái niệm "đồng quy". Nhưng ta đã có một cách nhìn độc đáo về "đồng quy" là tạo nên một tam giác có diện tích bằng không và ta đã tìm ra con đường để mở rộng, con đường để đi đến cái mới. Trong toán học có nhiều phát minh khá quan trọng đã ra đời từ những cái "cũ rích" chỉ vì tác giả đã có một cách nhìn rất độc đáo về cái cũ rích đó. Ví dụ, cho p là một số nguyên tố thì $p + 1$ là gì? Theo cách nhìn cổ điển thì $p + 1$ là số nguyên đứng liền sau p. Nhưng có người đã nhìn $p + 1$ là tổng các ước số của p và nhờ đó đã phát minh ra một định lí khá quen biết trong lí thuyết số.

4) Từ một trường hợp đặc biệt thường có nhiều hướng suy nghĩ để khái quát. Hướng nào là đúng, hướng nào là sai, làm sao để sớm biết. Qua các đề toán trên, ta thấy rõ cách làm là sau khi có một dự đoán nào đó về sự "mở rộng", hãy áp dụng điều dự đoán đó vào một số trường hợp đặc biệt. Nếu dự đoán của ta là sai thì cái sai đó thường bộc lộ ra ngay, ví như đề toán 1, khi ta dự đoán sự mở rộng của $m = b/2$ là $m = (b \pm d)/2$ hay $m^2 = b^2 \pm d^2)/4$ thì ta đã thấy ngay cái sai khi thử vận dụng vào một số trường hợp đặc biệt. Nhờ phát hiện sớm cái sai mà ta không mất thời gian đeo đuổi điều dự đoán. Nếu dự đoán của chúng ta là đúng hướng thì nói chung trong dự đoán vẫn còn một số điều chưa rõ, chẳng hạn như có một vài hệ số nào đó chưa xác định. Trong trường hợp này, việc vận dụng điều dự đoán vào một số trường hợp đặc biệt giúp ta sớm xác định những cái gì chưa rõ. Trong đề toán 1, chính nhờ cách này mà ta xác định được các hệ số k_1, l_1, l'_1, k_2, l_2, l'_2. Tuy nhiên, dù đã xác định được những cái chưa rõ thì kết quả vẫn chỉ là một dự đoán và sau đó cần phải chứng minh rằng điều dự đoán đó quả là đúng.

Tuy là "*tạm*", nhưng chắc các bạn cũng thấy được rằng phát minh toán học không phải là một cái gì bí hiểm, chỉ những người may mắn có một năng khiếu đặc biệt mới làm được việc đó, mà là một việc tuy không dễ dàng đơn giản, nhưng cũng có quy luật của nó, nhờ đó có thể có bài bản và có thể rèn luyện được.

Nào, những ai đã động não hãy đối chiếu những gì mình đạt được với phần 6 sau đây:

6. Đồng quy và không đồng quy

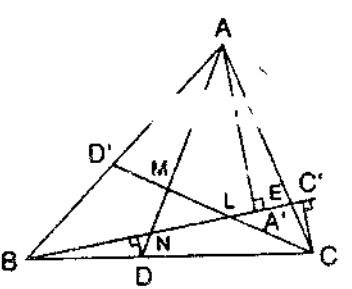
Bạn đã nhận thấy rằng toán học tiến lên theo con đường mở rộng từ những trường hợp đặc biệt ra thành những trường hợp

tổng quát: từ công thức lượng giác trong tam giác vuông đến công thức lượng giác trong tam giác thường, từ số hữu tỉ đến số thực, từ hình học Ơ-clít đến hình học phi Ơ-clít (mà hình học Ơ-clít chỉ là một trường hợp đặc biệt). Và bạn có chú ý rằng giữa cái "chung" và cái "riêng" vừa có mặt trái ngược nhau (tam giác vuông khác tam giác thường) vừa có mặt thống nhất với nhau (tam giác vuông cũng là tam giác, đặc biệt ở chỗ có một góc bằng 90°). Nhưng sự chú ý như vậy có thể dẫn bạn đến phát minh ra cái "mới" đây. Trong bài này, ta hãy thử mở rộng tính chất "đồng quy" của ba đường thẳng nào đó xuất phát từ ba đỉnh của một tam giác. Mở rộng như thế nào nhỉ? Có lẽ các bạn quá quen với cách nghĩ rằng "đồng quy" và "không đồng quy" là trái ngược nhau, nên cảm thấy khó khăn chăng? Nào, bây giờ bạn hãy thử nghĩ về phía "thống nhất" xem sao. Cũng không khó gì lắm mà không thấy rằng ba đường đồng quy tạo nên một tam giác có một diện tích S. Thế thì thấy ngay rằng "đồng quy" là trường hợp đặc biệt của "không đồng quy" khi $S = 0$ ($S = \infty$ khi ít nhất hai trong ba đường song song với nhau). Nhưng cách xem xét trên đây không phải là cách duy nhất. Chẳng hạn, ta hãy xét ba đường AD, BE, CF không cắt nhau và tạo nên tam giác LMN. Trường hợp "đồng quy" sẽ là trường hợp đặc biệt của trường hợp trên khi:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} \qquad (1)$$

tức là M trùng với N. Để đặc trưng trường hợp "đồng quy" bằng một số, ta có thể viết:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = 1 \qquad (2)$$



Như vậy, số $k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$ chỉ cho ta biết ba đường AD, BE, CF có đồng quy (k = 1) hay không (k ≠ 1). Đến đây, yêu cầu chặt chẽ về mặt toán học buộc ta phải đặt câu hỏi: "Nếu ta xét những tỉ số kép (gọi là kép vì đó là tỉ số của hai tỉ số) tương tự trên BE, CF thì ta có được cùng một số k đó hay lại là những số *l*, m khác k nhưng khi k = 1 thì cũng có *l* = m = *l*. Vậy ta phải tính *k* theo các tỉ số xác định các điểm D, E, F: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = F$, $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = q$, $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = r$, rồi hoán vị vòng quanh các cụm chữ ABC, DBF, LMN, pqr để có các tỉ số kép $l = \frac{\overline{NB}}{\overline{NE}} : \frac{\overline{LB}}{\overline{LE}}$ và $m = \frac{\overline{LC}}{\overline{LF}} : \frac{\overline{MC}}{\overline{MF}}$. Từ A, C và D, ta hạ các đường vuông góc AA', CC' và DD' xuống đường thẳng BF.

Ta có:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} =$$

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\overline{CD} + \overline{DB}}{\overline{DB}} = \frac{1}{q}\left(-\frac{1}{p} + 1\right) = \frac{p-1}{pq}.$$

Bằng cách tính tương tự, ta có $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = (1 - p)r$.

Vậy $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = -pqr$. Về sau không thay đổi khi thực hiện hoán vị vòng quanh p, q, r. Vậy quả là k = *l* = m = −pqr.

Ta sẽ gọi số này là k và có thể phát biểu:

Định nghĩa: Ba đường thẳng AD, BE, CF xuất phát từ ba đỉnh A, B, C của một tam giác sẽ gọi là k - cắt nhau(*) khi chúng cắt các cạnh đối diện ở các điểm D, E, F sao cho $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -k$.

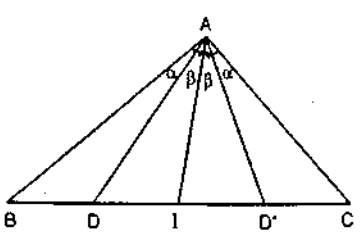
Như vậy, "đồng quy" chỉ là trường hợp đặc biệt của k - cắt nhau khi k = 1. Khi này, theo định nghĩa trên, ta có ngay định lí Xêva (Céva). Nếu áp dụng định lí Mêlênauyt (Ménélaus) thì ta lại gói luôn được cả vào trong khái niệm "k - cắt nhau" (trường hợp D, E, F thẳng hàng, lúc đó k = −1).

Với khái niệm "k - cắt nhau" ta có thể mở rộng khái niệm "đồng quy", ta hãy mở rộng định lí quen biết sau đây:

Định lí 1: *Trong một tam giác, nếu ba đường thẳng lần lượt xuất phát từ ba đỉnh mà đồng quy thì ba đường đối phân của chúng (hai đường đối phân là hai đường đối xứng với nhau qua phân giác của góc tạo bởi hai cạnh đồng quy với chúng tại cùng một đỉnh) cũng đồng quy.*

(Bạn nào chưa biết định lí 1 thì cứ chấp nhận và tốt hơn nữa, tự chứng minh lấy).

Để mở rộng định lí này, ta hãy xét đường đối phân AD' của AD. Gọi I là chân đường phân giác, ta có các góc (định hướng) α, β như ở h.2 vì AI là phân giác chung của các góc *BAC và DAD*.



(*) *Bạn đọc chú ý rằng khái niệm k – cắt nhau là hoàn toàn mới, không chỉ đối với học sinh, mà là mới đối với loài người.*

Ta có:

$$p = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\frac{1}{2}AB.AD\sin(-\alpha)}{\frac{1}{2}AC.AD\sin\beta} = -\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

$$p' = \frac{\overline{D'B}}{D'C} = \frac{\frac{1}{2}AB.AD\sin(-\beta)}{\frac{1}{2}AD'.AC\sin\alpha} = -\frac{AB\sin\beta}{AC\sin\alpha}$$

Vậy: $pp' = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Hoán vị vòng quanh, ta có:

$$qq' = \left(\frac{BC}{BA}\right)^2 \quad rr' = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2,$$

do đó $(pqr)(p'q'r') = \left(\frac{AB.BC.CA}{AC.BA.CB}\right)^2 = 1$. Hay $kk' = 1$ nếu đặt $k' = -p'q'r'$.

Ta có định lí:

Định lí 2. *Trong tam giác, nếu ba đường thẳng lần lượt xuất phát từ ba đỉnh mà cắt k - cắt nhau thì các đối phân của chúng sẽ k' - cắt nhau với* $k' = \frac{1}{k}$.

Định lí 1 là trường hợp đặc biệt của định lí 2 khi $k = 1$. Nếu $k = -1$ thì $k' = -1$, nên ta có thêm định lí.

Định lí 3. *Trong một tam giác, nếu ba đường thẳng lần lượt xuất phát từ ba đỉnh, mà có các chân (tức là giao điểm với*

đường thẳng chứa cạnh đối diện) thẳng hàng thì các đối phân của chúng có các chân thẳng hàng.

Rõ ràng là ta đã có những phát minh nhỏ với vốn kiến thức phổ thông. Có được phát minh này là nhờ ta biết nhìn hai khái niệm "đồng quy" và "không đồng quy" vốn được coi như mâu thuẫn (trái ngược) với nhau theo một cách mới giúp thống nhất chúng lại với nhau (cả hai đều trở thành "k - cắt nhau"). Cách suy nghĩ như vậy nằm trong cái mà người ta gọi là "tư duy biện chứng". Như vậy, công đầu ở đây thuộc về "tư duy biện chứng". Nó giúp chúng ta nghi vấn rằng có một định lí mở rộng định lí 1, mở đường cho chúng ta tìm tòi. Để tìm tòi, chúng ta đã dùng suy diễn lôgic và cuối cùng tìm được định lí 2. Vậy ở đây, tư duy lôgic đóng vai trò "thừa hành" để giải quyết nghi vấn khoa học nói trên. Trong khi giải quyết, ta đã dùng một thủ thuật là thay thế việc so sánh hai tỉ số $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$ và $\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$ xem chúng có bằng nhau hay không bằng việc nghiên cứu tỉ số k của chúng. Kiểu tư duy dùng thủ thuật này có thể gọi là "tư duy kĩ thuật" vì nó giống với tư duy của người chế tạo ra công tơ để chỉ việc nhìn vào số ghi trên công tơ là biết được lượng điện tiêu thụ. Như vậy, trong bài này, tư duy sáng tạo toán học là một sự tổng hợp hài hòa của ba loại tư duy: biện chứng (giúp phát hiện vấn đề), lôgic (giúp giải quyết vấn đề), kĩ thuật (làm dễ dàng việc giải quyết vấn đề). Một dịp khác, ta sẽ thấy thêm vai trò của các tư duy thuật toán, tư duy quản lí, tư duy kinh tế trong sáng tạo toán học. Và cả tư duy hình tượng cũng rất cần. Nếu chỉ vùi đầu làm những bài toán khó thì chưa đủ để rèn luyện tư duy sáng tạo toán học vì làm xong một bài toán khó rồi, nếu không có ai (thầy hay sách) ra thêm cho chúng ta những bài toán khác thì ta "thất nghiệp". Trong bài này, ta tự ra lấy bài toán xét mối quan hệ giữa k và k' và sau khi làm

xong bài toán đó, ta phát minh ra định lí 3. Nói "phát minh" cũng không có gì quá đáng vì bạn cũng khó tìm ở đâu ra định lí đó.

Nhưng nào đã hết. Tư tưởng tiến công chưa cho phép dừng lại. Hãy xem tiếp phần 7.

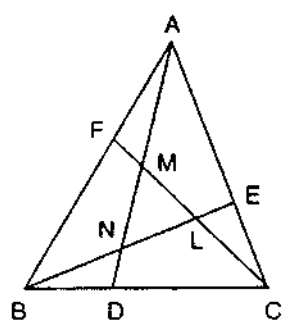
7. Trở lại vấn đề "đồng quy" và "không đồng quy"

Phần 6 đã đề cập đến sự thống nhất giữa "đồng quy" và "không đồng quy": cho một tam giác ABC và ba điểm D, E, F theo thứ tự trên ba cạnh BC, CA, AB và xác định bởi các tỉ số $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = k_1$, $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = k_2$, $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = k_3$. Ta gọi L, M, N là các điểm BE x CF, AD x CF, AD x BE.

Trong bài toán trên ở phần 6 ta đã tính ra:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = (1 - k_1)k_3 \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = \frac{k_1 - 1}{k_1 k_2} \qquad (2)$$



và thấy rằng nếu tỉ số *k* giữa hai tỉ số trên:

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = -k_1k_2k_3$$ mà bằng 1 thì M và N trùng nhau, nghĩa là AD, BE, CF đồng quy còn nếu $k \neq 1$ thì $M \neq N$ và ba đường đó không đồng quy.

Hoán vị vòng quanh trong các bộ ba (ABC), (LMN), (123), đĩ nhiên ta cũng có:

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NE}} : \frac{\overline{LB}}{\overline{LE}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{LF}} : \frac{\overline{MC}}{\overline{MF}} = -k_1k_2k_3 = k$$

và từ đó đã đi đến định nghĩa.

Định nghĩa 1. Ba đường thẳng AD, BE, CF sẽ gọi là k - cắt nhau nếu ba tỉ số kép (tỉ số giữa hai tỉ số) nói trên bằng k. Và như vậy thì "đồng quy" là "1 - cắt nhau".

Trong bài này, ta sẽ xét tỉ số m giữa diện tích hai tam giác MLN và ABC và đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa 2. Ba đường thẳng AD, BE, CF sẽ gọi là "cắt nhau *m* nếu tỉ số diện tích của hai tam giác MNL và ABC bằng *m* và như vậy thì "đồng quy" là "cắt nhau" - 0".

Để làm sáng tỏ hơn định nghĩa này, ta hãy tính *m*. Để viết cho gọn, ta luôn luôn có thể coi diện tích của tam giác ABC bằng 1 (bằng cách chọn đơn vị diện tích thích hợp). Như vậy thì *m* bằng diện tích của tam giác MNL. Sau đây, ta sẽ xét các tam giác có định hướng, nghĩa là có tính đến thứ tự các đỉnh của chúng. Nếu ta đi trên chu vi của một tam giác (theo thứ tự đã cho của các đỉnh) ngược chiều kim đồng hồ thì diện tích tam giác (có định hướng) đã cho là dương; nếu thuận chiều kim đồng hồ thì diện tích là âm.

Để cho tiện, ta sẽ kí hiệu diện tích đại số của một tam giác bằng các chữ chỉ các đỉnh sắp thứ tự của nó. Như vậy, áp dụng định lí về tỉ lệ diện tích của hai tam giác có chiều cao bằng nhau (tỉ lệ đó bằng tỉ lệ hai đáy) hoặc có một góc chung (tỉ lệ này bằng tỉ lệ tính các cạnh của góc chung), ta viết ngay được các đẳng thức sau đây (ABC = 1):

$$ABD = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}; \quad \frac{AFM}{ABD} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}; \quad \frac{m}{FMA} = \frac{\overline{ML}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{MN}}{\overline{MA}}$$

Nhân vế với vế ba đẳng thức trên, ta có:

$$m = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}.\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}.\frac{\overline{ML}}{\overline{FM}}.\frac{\overline{MN}}{\overline{MA}} \qquad (3)$$

Ta lần lượt tính 5 tỉ số ở vế sau của (3):

$$1°)\ \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{DC}} = \frac{1}{1-\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{k_1}} = \frac{k_1}{k_1-1} \qquad (4)$$

$$2°)\ \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AF}+\overline{FB}} = \frac{1}{1-\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{k_3}} = \frac{k_3}{k_3-1} \qquad (5)$$

$$3°)\ \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}+\overline{MD}} = \frac{1}{1-\frac{\overline{MD}}{\overline{MA}}}\ ;\ \text{vậy, theo (1) ta có:}$$

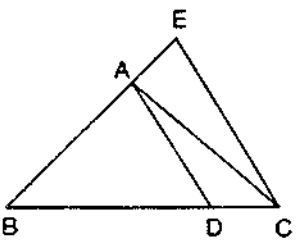
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-k_1)k_3}} = \frac{(1-k_1)k_3}{(1-k_1)k_3-1} \qquad (6)$$

$$4°)\ \frac{\overline{ML}}{\overline{MF}} = \left(\frac{\overline{ML}}{\overline{MF}} : \frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}\right).\frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}.$$ Ở đây, ta chia cho $\frac{\overline{CF}}{\overline{LC}}$ rồi lại nhân lên với $\frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}$ nhằm mục đích tận dụng tỉ số kép $\left(\frac{\overline{ML}}{\overline{MF}} : \frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}\right)$ vì tỉ số kép này có liên quan với tỉ số kép

$\left(\frac{\overline{ML}}{\overline{MF}}:\frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}\right)=k$; quả vậy

$$\left(\frac{\overline{ML}}{\overline{MF}}:\frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}\right)=\left(\frac{\overline{CF}}{\overline{CL}}:\frac{\overline{ML}}{\overline{MF}}\right)=\frac{\overline{CL}+\overline{LF}}{\overline{CL}}.\frac{\overline{MF}+\overline{FL}}{\overline{MF}}=$$

$$=\left(1+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}\right).\left(1+\frac{\overline{FL}}{\overline{MF}}\right)=$$



$$=1+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}+\frac{\overline{FL}}{\overline{MF}}+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}.\frac{\overline{FL}}{\overline{MF}}$$

$$=1+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}.\frac{\overline{MF}}{\overline{MF}}+\frac{\overline{LF}}{\overline{MF}}.\frac{\overline{CL}}{\overline{CL}}+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}.\frac{\overline{FL}}{\overline{MF}}=$$

$$=1+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}.\frac{\overline{MF}+\overline{FL}+\overline{LC}}{\overline{MF}}==1+\frac{\overline{LF}}{\overline{CL}}.\frac{\overline{MC}}{\overline{MF}}$$

$$=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$$

Còn phải tính $\frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}$;

$\frac{\overline{CL}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{CL}}{\overline{CL}+\overline{LF}}=\frac{1}{1-\frac{\overline{LF}}{\overline{LC}}}$; thực hiện hai lần hoán vị vòng quanh trong các bộ ba (ABC), (DEF), (LMN), (123), từ (1) suy ra

$\frac{\overline{LC}}{LF} = (1 - k_3)k_2$; do đó:

$$\frac{\overline{CL}}{CF} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-k_3)k_2}} = \frac{(1-k_3)k_2}{(1-k_3)k_2-1}.$$

Vậy $$\frac{\overline{MF}}{ML} = \frac{k-1}{k}.\frac{(1-k_3)k_2}{(1-k_3)k_2} \qquad (7)$$

5°) Tương tự như ở phần 4°) ta tính được

$$\frac{\overline{MN}}{MA} = \frac{k-1}{k}.\frac{(1-k_1k_2)}{k_1(1-k_2)-1} \qquad (8)$$

Cuối cùng, ta được:

$$m = \frac{k_1}{k_1-1}.\frac{k_3}{k_3-1}.\frac{(1-k_1)k_3}{(1-k_1)k_3-1} \times$$

$$\times \frac{(1-k_3)k_2}{(1-k_{13})k_2-1}.\frac{(-k_1k_2)}{k_1(1-k_2)-1}.\frac{(k-1)^2}{k^2}$$

$$= \frac{-(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)}{(1-k_1)(1-k_3)[(1-k_1)k_3-1]} \times$$

$$\times \frac{(1-k_1)(1-k_3)(k-1)^2}{[(1-k_3)k_2-1)][k_1(1-k_2-1)k]^2}$$

hay $$m = \frac{(1+k_1k_2k_3)^2}{[1+k_1(k_2-1)][(1+k_2(k_3-1]} \times \frac{1}{[1+k_3(k_1-1)]}$$

Ta thấy ngay: $m = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Xét mẫu số, ta thấy rằng, nếu một trong ba thừa số triệt tiêu thì m = ∞; ta dự đoán, khi đó hai trong ba đường AD, BE, CF song song với nhau. Quả vậy, giả sử $k_1 + \frac{1}{(k_2 - 1)} = 0$ tức $k_1 = \frac{1}{(1 - k_2)}$; để AD song song với BE thì cần và đủ là

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AE} + \overline{EC}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}} \text{ tức } k_1 = \frac{1}{1 - k_2} \quad (9)$$

Tương tự như vậy, nếu BE // CF thì $k_2 = \frac{1}{1 - k_3}$ (10)

Nếu (9) và (10) đều thỏa mãn thì AD // BE // CF tức là từ (9) và (10) rút ra $k_3 = \frac{1}{1 - k_1}$ (11), điều mà ta có thể thấy ngay khi rút k_3 từ (10) rồi thay k_2 theo (9). Khi đó $k_1k_2k_3 = k_1\left(1 - \frac{1}{k_1}\right)\left(\frac{1}{1 - k_1}\right) = -1$, vậy $m = \frac{0}{0}$ tức là diện tích tam giác MNL vô định (M, N, L đều xa vô tận).

Lại vẫn chưa hết. Tư tưởng tiến công chưa cho phép dừng. Hãy xem tiếp phần 8.

8. Từ đồng quy đến thẳng hàng

Ở phần 6 ta đã thống nhất hai khái niệm "đồng quy" và "không đồng quy" (của ba đường thẳng đi qua ba đỉnh của một tam giác) bằng khái niệm "k - cắt nhau) (đồng quy là trường hợp

đặc biệt khi k = 1) và cả bằng khái niệm "cắt nhau - m" (đồng quy là trường hợp đặc biệt khi $m = 0$). Đến đây, hẳn bạn nào có tư tưởng tiến công sẽ không chịu dừng lại. Bởi lẽ, khái niệm "đồng quy" thường đi đôi với khái niệm "thẳng hàng" (của ba điểm nằm trên các cạnh - hoặc cạnh kéo dài - của một tam giác). Dĩ nhiên, ta nghĩ đến mở rộng khái niệm "thẳng hàng" để làm sao thống nhất được hai khái niệm "thẳng hàng" và "không thẳng hàng". Khái niệm "cắt nhau - m" gợi cho ta định nghĩa sau đây:

Định nghĩa. *Ba điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên ba đường thẳng BC, CA, AB tạo nên tam giác ABC sẽ gọi là "n - gãy khúc", nếu tỉ lệ diện tích (đại số) của hai tam giác DEF và ABC bằng n.*

Điều kiện cần và đủ để D, E, F thẳng hàng là n = 0. Vậy "thẳng hàng" là "0 - gãy khúc".

Ta hãy tính n theo các tỉ lệ k_1, k_2, k_3 (theo đó các điểm D, E, F chia các cạnh BC, CA, AB). Để tính n, xin nhắc lại: diện tích đại số của một tam giác ABC (kí hiệu là ABC, các chữ A, B, C lấy theo thứ tự đó) là một số có giá trị tuyệt đối bằng diện tích của tam giác đó và có dấu + hay - tùy theo khi đi trên chu vi của tam giác ABC theo thứ tự A, B, C ta đi ngược hay thuận chiều kim đồng hồ. Như vậy diện tích đại số đổi dấu khi ta hoán vị hai đỉnh và không đổi dấu khi ta hoán vị vòng quanh các đỉnh.

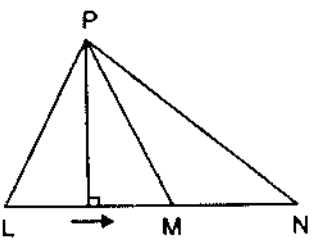
Bổ đề. Nếu M, L, N là ba điểm thẳng hàng và P là một điểm ở ngoài đường thẳng LMN thì ta có:

$$PLM = PLN + PNM.$$

Chứng minh. Gọi h là khoảng cách từ P đến đường thẳng LMN. Nếu đường thẳng LMN được định hướng từ trái sang phải thì:

$$PLM = \frac{1}{2}h\overline{LM} = \frac{1}{2}h(\overline{LN} + \overline{NM})$$

$$= \frac{1}{2}h\overline{LN} + \frac{1}{2}h\overline{NM} = PLN + PNM$$

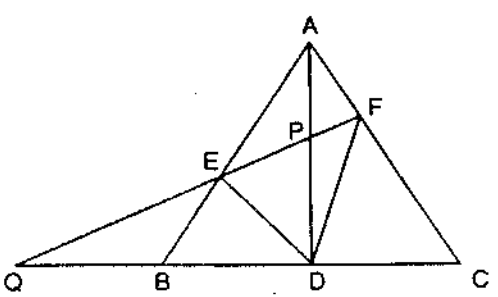


Dưới đây ta sẽ dùng bổ đề trên để tính n (chú ý rằng khi có tam giác tạo nên bởi ba điểm thẳng hàng và một điểm thứ tư không thẳng hàng với ba điểm trên, thì ta sẽ cố đưa đỉnh này lên vị trí đầu bảng hoán vị vòng quanh); như vậy, ta có:

$$ABC = ABD + ADC = DAB + DCA \quad (1)$$

$$DAB = DAF + DFB \quad (2)$$

$$DCA = DCE + DEA \quad (3)$$



Gọi P là giao điểm của AD và EF

$$DAF = FDA = FDP + FPA \quad (4)$$

$$DEA = EAD = EAP + EPD \quad (5)$$

Vậy:

$$ABC = (FDP + FPA) + DFB + DCE + (EAP + EPD) =$$
$$= DFB + DCE + (AFP + APE) + (DEP + DPF)$$
$$= DFB + EDC + AFE + DEF$$

Nếu ta chọn diện tích ABC (ta có thể sắp xếp thứ tự A, B, C để ABC > 0) làm diện tích đơn vị thì n bằng diện tích DEF.

$$n = DEF = 1 - FEA - DFB - EDC$$

$$FEA = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}.\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AF}+\overline{FB}}.\frac{\overline{AE}}{\overline{AE}+\overline{EC}} =$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{k_3}}.\frac{1}{1-k_2} = \frac{-k_3}{(1-k_2)(1-k_3)}.$$

Hoán vị vòng quanh (ABC), (DEF), (123), ta có

$$DFB = \frac{-k_1}{(1-k_3)(1-k_1)},\ EDC = \frac{-k_2}{(1-k_1)(1-k_2)}.$$

Vậy:

$$n = 1 + \frac{k_3}{(1-k_2)(1-k_3)} + \frac{k_1}{(1-k_3)(1-k_1)} + \frac{k_2}{(1-k_1)(1-k_2)}$$

hay:

$$n = \frac{1-k_1k_2k_3}{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)}.$$

Chú ý: $n = 0 \Leftrightarrow k_1k_2k_3 = 1$ và ta có định lí Mênêlauyt.

$n = \infty$ khi một trong các tỉ số k_1, k_2, k_3 bằng 1 tức là khi một trong ba điểm D, E, F ra xa vô tận nếu cả D, E, F đều ra xa vô tận thì D, E, F vẫn có thể xem là thẳng hàng trên đường thẳng

xa vô tận, tương giao của mặt phẳng tờ giấy với một mặt phẳng nào đó song song với mặt phẳng tờ giấy. Khi đó n có dạng $\frac{0}{0}$.

Khái niệm "cắt nhau - m" gợi cho ta khái niệm "n - gãy khúc". Vậy khái niệm "k - cắt nhau" gợi cho ta cái gì? Bắt chước khái niệm "k - cắt nhau", ta sẽ xét tỉ số kép tạo nên tại một trong ba chùm đường thẳng có tâm là D, E, F bởi bốn đường thẳng theo thứ tự sau đây:

- Đường thẳng nối tâm của chùm với đỉnh đối diện.

- Đường thẳng chứa cạnh trên đó có tâm của chùm.

- Hai đường thẳng nối tâm của chùm đang xét với hai tâm chùm còn lại, lấy theo thứ tự vòng quanh. Chẳng hạn, nếu xét ở chùm tâm D, thì đó là tỉ số kép của chùm bốn đường thẳng DA, DB, DE, DF (h.2). Ta cắt chùm này bằng đường thẳng EF, thế thì tỉ số kép phải tính là tỉ số kép của bốn điểm P, Q, E, F (Q là giao điểm của EF và BC). Tỉ số kép của bốn điểm này lại bằng tỉ số của bốn điểm (D, Q, C, B). Mà

$$(DQCB) = (BCQD) = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} : k_1 .$$

Theo định lí Mênêlauyt thì $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} . \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} . \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$.

Vậy $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \frac{1}{k_2 k_3}$ và tỉ số kép tìm bằng $\frac{1}{k_1 k_2 k_3} = -\frac{1}{k}$ không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh (ABC), (DEF), (123), điều mà ta có thể dự đoán trước. Nếu gọi tỉ số kép đó bằng p thì ta có định nghĩa:

Định nghĩa. Ba điểm D, E, F nằm trên ba cạnh (hay cạnh kéo dài) BC, CA, AB của tam giác ABC sẽ gọi là "sắp hàng - p" nếu ba tỉ số kép bằng nhau sau đây có giá trị p:

$(DA, DB, DE, DF) = (EB, EC, EF, ED) = (FC, FA, FD, FE) = p.$

Theo định nghĩa này thì "thẳng hàng" là "sắp hàng - 1".

Ta có định lí:

Định lí. *Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng (đi qua ba đỉnh của một tam giác) "k - cắt nhau" là chân của chúng "sắp hàng - p"* với $p = -\frac{1}{k}$.

9. Ai bảo toán học là khô khan?

(Trích từ báo *Toán học và tuổi trẻ*, số 182 tháng 2-1992)

Trong toán học, ta hay gặp chữ "phải" lạnh lùng, khô cứng. Điều kiện "cần" nghe có vẻ ít mệnh lệnh hơn. Nhưng dù sao có dùng chữ "cần" thì thực chất bà chúa lôgic hình thức cũng chẳng khác gì ông tướng đứng trước hàng quân ra nghiêm lệnh. Có lẽ vì vậy mà toán học khô khan chăng? Song "lệnh" ra mà đúng lại làm nên những việc rung chuyển thế giới. Tiếng hô của ông tướng chỉ huy giỏi có thể đanh, lạnh nhưng đội quân xung trận trùng điệp, uy nghi lại là nguồn cảm hứng của bao câu thơ hay. Hồi nhỏ tôi nghe nói lên mặt trăng xa lắm. Tôi đã hình dung ra một cô tiên xiêm y phấp phới, tay cầm thước ngọc lóng lánh, bay lên cung Quảng, vừa bay vừa đặt thước đo. Sau này, học đến bài đo đạc, tính toán khoảng cách đến các thiên thể, tôi mới hiểu trí tuệ con người thật là tuyệt diệu. Tôi nghĩ: "Quả là có một cô tiên. Đó là toán học". Rất tiếc tôi không phải là thi sĩ để có thể ghi lại niềm xúc động đó thành thơ.

Nhưng nàng tiên toán học còn có một vẻ đẹp khác thâm trầm, kín đáo. Chỉ những ai đến với toán học bằng niềm say mê, tìm tòi mới cảm nhận hết vẻ đẹp ấy. Này nhé, bạn hãy lấy một hình thoi. Có phải hai đường chéo của nó vuông góc với nhau không? Nếu bạn cứ nhìn "đường chéo" thì chỉ rút ra được kết luận đáng buồn". "Hình bình hành mà không phải là hình thoi thì không có tính chất đó". Nhưng nếu tư duy mềm mại, uyển chuyển một chút, nhìn các "đường chéo" đó là các đường "phân giác" thì bạn sẽ có ngay một tính chất khái quát hơn: "Bốn phân giác của bốn góc trong hình bình hành tạo nên một hình chữ nhật". Mềm mại dẫn đến sáng tạo là vậy.

Sáng tạo trong toán học giống như việc người kiến trúc sư tài giỏi thiết kế nên những lâu đài. Nàng tiên toán học có nhiều lâu đài táo bạo, tân kì. Chiêm ngưỡng những lâu đài ấy bạn sẽ có nguồn cảm hứng sáng tạo và hi vọng sau này cũng thiết kế được những lâu đài đẹp. Con "số không" là một lâu đài như thế. Bạn ngạc nhiên ư? Táo bạo vì "không có gì" để mà dám đặt ra một số tương ứng. Còn tân kì ư? Thử tưởng tượng Ngọc Hoàng ra lệnh cho cô tiên của chúng ta: "Từ nay trẫm cấm khanh không được dùng con số thấp hèn đó". Lúc đó có lẽ cả nền văn minh của loài người phải chao đảo. Chỉ nay mai thôi, bạn sẽ biết thêm những lâu đài khác. Số ảo mà bạn bình phương lên thành số âm, từng bị chế diễu là số ngu ngốc, hóa ra lại cực kì thông minh. Nhờ nó mà cô tiên có thêm nhiều phép lạ như biến các hàm số lượng giác thành hàm số mũ và ngược lại. Loài người sống trong không gian ba chiều; toán học có những không gian nhiều chiều, thậm chí vô số chiều làm cho nàng tiên của chúng ta càng có nhiều phép lạ, Tề thiên Đại thánh cũng phải kiềng.

Toán học còn có vẻ đẹp của sự giản dị, hài hòa, tiết kiệm. Cảm nhận điều này sẽ thúc đẩy toán học tiến tới. Ví dụ: $a^2 = b^2 + c^2$ là vẻ đẹp giản dị của định lí Pi-ta-go. Cội nguồn của vẻ đẹp đó lại chính là tiên đề Ơ-clít. Vứt bỏ tiên đề này đi thì cái giản dị trên cũng biến mất. Vòng tròn đẹp với sự đối xứng tuyệt hảo mà căn nguyên là vẻ đẹp tiết kiệm. Rèn luyện tư duy toán học là như vậy, không nên hiểu phiến diện chỉ là rèn luyện tư duy lôgic. Chỉ vục đầu vào giải hết bài toán khó này đến bài toán khó khác thì tầm nhìn không được mở rộng, tư duy không được mềm mại. Câu chuyện "hình thoi" và "số không" nói trên cho ta thấy rằng ngay với những chuyện đơn giản như vậy cũng có thể rèn cho tư duy thêm mềm mại, sự rung cảm thêm tinh tế, nhen nhóm đốm lửa về hoài bão toán học trong tương lai.

10. Cổ học tinh hoa với toán học

(Trích từ đặc san *Tự học* số 4, 11-1999).

Khi còn là học sinh phổ thông tôi đã thích đọc *Cổ học tinh hoa*. Những câu chuyện kể trong đó ý tứ thật sâu xa. Tôi còn nhớ mãi câu chuyện sau đây đã góp phần rèn luyện tư duy toán học cho tôi kể từ khi học phổ thông và cho mãi về sau khi đã là sinh viên rồi nhà giáo. Chuyện kể rằng, có hai vợ chồng muốn đi xem hát nhưng lại sợ không có ai trông nhà, cửa ngõ khóa không chắc, trộm sẽ vào lấy hết. Bàn đi tính lại, anh chồng bèn nghĩ ra sáng kiến bắt chước kế Khổng Minh giữ thành trong *Tam quốc*. "Khổng Minh thiếu quân để giữ thành bèn cho một đội múa hát lên mặt thành, nhã nhạc vang lừng; quân do thám địch thấy thế nghĩ bụng chắc Khổng Minh phòng bị chắc chắn lắm mới ung

dung như thế, liền về bẩm với chủ tướng ra lệnh thôi không đánh chiếm thành của Khổng Minh". Hai vợ chồng bèn mở toang cửa, đốt đèn sáng trưng rồi ung dung đi xem hát, nghĩ bụng, kẻ trộm thấy đèn sáng, cửa mở sẽ cho là có người ở nhà mà không dám vào. Quả nhiên, hôm đó bình yên vô sự. Lần sau, lại có hát, hai vợ chồng lại y kế như hôm trước mà đi xem. Lần này thì trộm vào lấy sạch. Hai người than thở oán trách Khổng Minh. Người hàng xóm biết chuyện, bèn nói: "Anh chị nên tự trách mình, trong *Tam quốc*, Khổng Minh chỉ dùng kế ấy có một lần".

Đọc chuyện trên, tôi thấy nó chứa một lời khuyên sâu sắc: "Phải cảnh giác với nếp cũ, đường mòn". Hai việc hoàn toàn như nhau nhưng xảy ra ở những thời điểm khác nhau là đã khác nhau rồi. Khi việc trước đã xảy ra thì những người liên quan có thể rút được kinh nghiệm rồi, nên khi việc y như thế lại xảy ra thì cách ứng xử của những người liên quan đã có thể khác rồi. Bài học của câu chuyện trên đây và nhiều câu chuyện khác đã rèn luyện cho tôi ý thức chống bảo thủ đi theo nếp cũ đường mòn trong khi học toán. Khi tình hình thay đổi, ví dụ như có thêm kiến thức mới, tôi lại hay trở lại một số bài toán cũ và tự hỏi liệu bây giờ có thể tìm ra một cách giải mới không? Cụ thể như khi đã học hình giải tích hay số phức, trở lại một số bài toán hình học khó tôi đã tìm được lời giải mới hay hơn. Và khi đã là cán bộ giảng dạy Đại học, dù còn rất trẻ, tôi đã cải tiến cách thành lập các công thức lượng giác trong hình học Lô-ba-sép-ki, gọn hơn cách làm của các vị giáo sư có tên tuổi ở nước ngoài. Nguồn gốc của cải tiến chỉ là ý nghĩ "không theo nếp cũ đường mòn". Chả là trước tôi, ai cũng theo cách đi từ dễ đến khó, thành lập công thức lượng giác Lô-ba-sép-ki cho tam giác vuông (dễ) đã rồi sau đó

mới xét đến tam giác thường (khó). Tôi nghĩ: "Đối với hình học Ơ-clít thì làm như vậy là đúng vì đó là hình học đầu tiên của loài người". Hình học Lô-ba-sép-ki là hình học thứ hai của loài người. Sao không biết kế thừa những thành tựu của hình học thứ nhất để đi thẳng vào tam giác thường, việc gì còn phải vòng vèo đi qua tam giác vuông. Tôi đem thực hiện ý nghĩ này thì thật là mĩ mãn. Tôi thông báo kết quả cho giáo sư Êphimôp ở Trường Đại học Tổng hợp Lô-mô-nô-xốp (Mát-xcơ-va) vì ông là tác giả sách *Hình học cao cấp* mà tôi hay sử dụng để soạn bài. Ít lâu sau, tôi nhận được thư cảm ơn của ông: ông cho biết ông đương chuẩn bị tái bản sách nói trên và bản thảo có sửa chữa đã đưa cho Nhà xuất bản, may mà còn kịp lấy về sửa lại phần "lượng giác Lô-ba-sép-ki" theo cách của tôi. Vài tháng sau, ông gửi biếu tôi sách tái bản (sách này có ở Thư viện Khoa học kĩ thuật trung ương, mã số 5V6661) với lời cảm ơn trong "Lời nói đầu" và đến phần lượng giác thì nói rõ hơn đây là cách làm của nhà toán học Việt Nam.

11. Toán học và văn nghệ

(Trích từ báo *Văn nghệ* số Xuân Đinh Sửu 15-2-1997)

Sinh viên khoa Toán một trường đại học đặt cho khoa mình cái tên 3K, ý nói học toán vừa khó, vừa khổ, vừa khô. Nếu hiểu khó và khổ theo tinh thần: "Không có con đường nào thênh thang dẫn lên các đỉnh cao của khoa học", thì hai K đầu là đúng, nhưng không riêng gì cho toán học. Còn cái K thứ ba? "Nữ hoàng của các khoa học mà lại khô ư? Mà gọi nữ hoàng đâu

đã đúng. Phải gọi là "nàng tiên" mới phải. "Hoàng" hàm ý quyền lực, nhiều khi độc đoán, thậm chí tàn nhẫn, vô luân, vô đạo. Toán học chỉ hiển hậu thuyết phục bằng lí lẽ chính xác, chặt chẽ với một cái tài thiên biến, vạn hóa đầy thú vị, đầy tính nhân văn mà không vị "hoàng" nào sánh nổi. "Nữ" là phái đẹp. Nữ hoàng dù có đẹp chim sa cá lặn, nguyệt thẹn hoa nhường, nghiêng nước nghiêng thành, thì cũng chỉ được một thời nhan sắc, còn toán học thì trẻ đẹp mãi, không già, bất tử và ngày càng đẹp lộng lẫy hơn. Nói đến tài thì có gì sánh nổi phép tiên. Nói đến sắc thì "đẹp như tiên". Tài sắc như vậy mà "khô" ư? Để cho người học thấy "khô" thì rõ ràng có vấn đề trong việc dạy và học toán. Quả thật, cách dạy và học toán hiện nay đã làm nghèo đi rất nhiều ở người học cái hứng thú, say mê tìm tòi, khám phá, sáng tạo. Lo truyền thụ, lo học kiến thức toán học là chính còn mặt rèn luyện tư duy toán học thì nghèo nàn. Phổ biến là người ta đồng nhất tư duy toán học với tư duy lôgic hình thức được giản đơn hóa hầu như chỉ còn phép suy diễn: thầy đưa định lí ra rồi dùng suy diễn để chứng minh: thầy ra bài tập, học sinh dùng suy diễn để làm bài. Học sinh chuyên toán phải tìm ra những mắt xích suy diễn phức tạp trong các bài toán khó. Họ được rèn luyện thêm về tư duy kĩ thuật khi phải tìm những thủ thuật lắt léo để giải những bài toán không mẫu mực, ít gặp trong thực tế. Mà thực tế cuộc sống đối với toán học là gì? Thường thì khía cạnh nhân văn trong thực tế cuộc sống đời thường hay bị bỏ qua. Chẳng hạn, trong đời thường, người ta khuyên nhau: "nghĩ đi rồi phải nghĩ lại" thì trong toán học có chứng minh thuận, chứng minh đảo; trong đời thường, người ta khuyên nhau: "nghĩ cho

hết nước, hết cái" thì trong toán học, khi biện luận phải xét cho hết mọi trường hợp có thể xảy ra; trong đời thường, người ta khuyên nhau phải "thức thời" mà "thời" là một tham số quan trọng trong đời sống thì trong toán học có "biện luận theo tham số". Lôgic biện chứng cũng là một điều phổ biến trong cuộc sống đời thường. Chẳng hạn, ai cũng có thể nghiệm bản thân rằng "trong cái dễ có cái khó, trong cái khó có cái dễ", nhưng trong dạy toán, hình thoi thì cứ cứng nhắc với luật bài trung. Đã có lần, tôi hỏi các giáo viên toán về học cao học ở Đại học Sư phạm: "Có bao giờ các anh, các chị cho học sinh thấy rằng một tam giác đồng thời cũng là một tứ giác hay không?". Họ đều trả lời "không" vì chẳng thấy có ích lợi gì. Khi chỉ cho họ thấy nếu ta coi tam giác là một tứ giác có một cạnh bằng không hoặc có một góc bằng 180^0 thì lập tức sẽ xuất hiện những mâu thuẫn kích thích sự nghiên cứu để tìm mặt thống nhất của chúng và nhờ vậy, một học sinh có thể từ một kiến thức suy ra được mười kiến thức khác và việc này không khó hơn tí nào so với việc giải những bài toán không mẫu mực ở các lớp chuyên mà giải xong cũng chả mở rộng tầm mắt được bao nhiêu.

Trong toán học cũng có nhiều hình tượng nghệ thuật bị che lấp bởi cách tiếp cận "áp đặt khái niệm và định lí" rồi suy diễn để chứng minh. Chẳng hạn, nếu tiếp cận đến số ảo $i = \sqrt{-1}$ chỉ bằng cách đưa ra đẳng thức đó rồi cứ làm các phép tính trên các số phức a + bi (a, b là số thực) như thường lệ, hễ gặp i^2 thì thay bằng -1, ta cũng đạt đến kiến thức nhưng tư duy, tình cảm không phát triển lên được mấy. Nếu tiếp cận theo cách sau đây thì giá trị giáo dục lớn hơn nhiều: hãy lùi lại trong lịch sử đến

thời kì loài người nghiên cứu việc giải phương trình bậc ba. Trước đó, mọi người đều nhất trí rằng căn bậc hai các số âm là vô nghĩa. Khi đã tìm được phương pháp giải phương trình bậc ba và đem ứng dụng nó để giải những phương trình biết trước là có ba nghiệm thì lại đụng đầu ngay vào căn bậc hai các số âm. Trong tình thế đó, có ý kiến táo bạo là cứ tạm xem các căn đó như có ý nghĩa và cứ làm tới đi xem sao. Thật là kì lạ! Mọi trở ngại đều vượt qua được hết, *i* xuất hiện như một vị cứu tinh, xong việc lại biến ngay y hệt như trong truyện thần thoại, ai đó gặp nạn chưa biết thoát ra như thế nào thì cô tiên xuất hiện, đưa chiếc đũa thần ra là tai qua nạn khỏi, người thoát nạn chưa kịp định thần thì cô tiên đã biến mất. Hình tượng nghệ thuật cô tiên ở đây thật là đắt. Và nó tạo ra một hình tượng thế giới ảo (các số phức) mà mỗi lần bí trong số thực (các số thực), các nhà toán học lại tìm đến cầu viện, giống như Tề thiên Đại thánh mỗi lần không hàng phục được yêu quái lại phóc lên thiên đình cầu cứu. Nhưng toán học không phải là tôn giáo để có thể lấy đức tin thay cho sự tường minh trí tuệ. Người ta phải lần cho đến ngọn nguồn của phép tiên $i = \sqrt{-1}$. Và người ta đã thành công khi tìm ra cách nhìn mới về số thực: số 2 chẳng hạn, khi đặt trước một vectơ V có thể coi như một cái lệnh: dựng một vectơ cùng phương, cùng hướng với V nhưng dài gấp đôi. Nếu lại thực hiện tiếp lệnh 3: 3 (2V) thì tức là thực hiện lệnh 6 mà ta có thể coi như là tích của hai lệnh 2 và 3. Với cách nhìn đó thì thấy ngay i là lệnh "quay đi 90° theo chiều dương" và i^2 là lệnh thực hiện liên tiếp hai phép quay góc +90°, kết quả vectơ V quay 180° tức là ta thực hiện lệnh −1; $i^2 = -1$ là vậy đó. Tiên đã hóa thành phàm; thật ra tư tưởng toán học này chính là tư tưởng: "nới rộng

ra thì mới cựa quậy được" ở trong đời thường, chẳng hạn như một đầu tàu hỏa trên đường ray, vì chạy trên một tuyến (không gian một chiều) nên không sao quay ngược lại được; muốn nó quay 180° phải đưa nó đến bàn quay (hoạt động trên một diện tức là không gian hai chiều); quay liên tiếp hai lần 90° thì nó sẽ quay ngược trở lại. Nói một cách bao quát thì toán là "khó" nếu chỉ hạn chế ở "kiến thức toán học" và "phép suy diễn"; nó sẽ không khó khi ta chú ý đến "văn hóa toán học" để quyện vào nhau "toán" và "đời thường", một đời thường không chỉ có số và hình mà có cả khát vọng "chân, thiện, mĩ". Được như vậy thì "toán" cũng rất nên thơ. Điều đó sẽ có ba cái lợi: một là cả tâm hồn, tư tưởng cũng giang cánh đỡ ta lên các đỉnh cao của tư duy toán học; tư duy này là một chỉnh thể hài hòa gồm tư duy lôgic, tư duy biện chứng, tư duy hình tượng và cả tư duy khác như tư duy quản lí, tư duy kinh tế (đi tìm cái tối ưu); tư duy kĩ thuật (đi tìm các thủ thuật); tư duy thuật toán (xây dựng các bài bản); nó làm cho sự sáng tạo toán học không còn là sự ngẫu nhiên, may mắn, mà là một sự tất nhiên. Hai là nếu sau này trong công tác, dù không trực tiếp dùng đến toán học thì có văn hóa toán học cũng rất có lợi. Ba là nó cho phép người ta học toán mọi lúc, mọi nơi, ở mọi người, bằng mọi cách và qua mọi nội dung như đọc *Tây du kí* cũng là một cách học toán. Mà nàng tiên toán học quả thật rất hấp dẫn người ta nếu biết đến với nàng theo cách đó. Điều có ý nghĩa nhất trong tài sắc của nàng là đã tìm ra được cái bất biến trong cái vạn biến khiến cho ai đến với nàng cũng có thể dùng cái bất biến để ứng với cái vạn biến. Nếu như hàng triệu ngôi nhà trong một thành phố lớn chung quy cũng chỉ có mấy kiểu kiến trúc thì toán học ngày nay, tuy có vô vàn các ngành và phân ngành cụ thể nhưng chung quy lại chỉ có mấy loại cấu trúc

toán học, mỗi ngành toán cụ thể là một mô hình của một cấu trúc toán học trừu tượng. Học sinh phổ thông khi học hình học sơ cấp và hình học giải tích chính là đến với hai mô hình khác nhau của cùng một cấu trúc gọi là: "không gian Ơ-clít". Nếu như các kiểu kiến trúc nhà lại được phân loại theo mấy nền văn minh của loài người thì các cấu trúc toán học cũng quy về ba cấu trúc mẹ. Cho nên toán học tuy thiên hình vạn trạng mà vẫn dễ dàng vẫy vùng trong đó, chuyển từ mô hình này sang mô hình khác, từ cấu trúc này sang cấu trúc khác, phát hiện thêm cấu trúc mới, mô hình mới, nếu có "văn hóa toán học". Cũng nhờ thế mà toán học càng ngày càng có khả năng xâm nhập khắp nơi, kể cả văn học, nghệ thuật. Một bức tranh nghệ thuật ngày nay cũng có tọa độ của nó. Để cho đơn giản, ta hãy lấy một bức tranh "đen trắng". Ta có thể phóng đại bức tranh đó bằng cách chia tờ tranh thành rất nhiều ô vuông bởi các đường ngang, dọc, rồi ô thì để trắng, ô thì tô đen; chia ô càng mịn thì phỏng càng gần đúng, nghĩa là tranh càng "nét". Nếu ta đi theo thứ tự các ô từ trái sang phải, từ trên xuống dưới, hễ gặp ô trắng thì ghi 0 và ô đen thì ghi 1, ta sẽ được một dãy các chữ số 0 và 1 mà ta có thể gọi đó là tọa độ của bức tranh, dựa vào đó ta có thể họa lại nó bằng cơ học (dệt tranh) hay bằng điện tử (truyền hình). Mỗi tác giả văn học cũng có tọa độ của mình: nếu nghiên cứu kĩ, sâu văn phong của các nhà văn thì có thể đặc trưng văn phong của mỗi người bằng một dãy những tần số xuất hiện các loại từ hay cụm từ nào đó và dãy các tần số đó, mã hóa bằng 0 và 1 có thể xem là tọa độ của nhà văn. Khi gặp một tác phẩm khuyết danh, ta có thể nhờ tọa độ của văn phong tác phẩm mà tìm ra tác giả. Toán học cũng đã vào hội họa, điêu khắc như một khuôn mặt được đặc trưng bằng những quy luật về các đường đồng mức v.v... Khi mà nhiều đối

tượng của văn học, nghệ thuật đã có tọa độ là một dãy những chữ số 0 và 1, máy tính điện tử chỉ cần dùng hai trạng thái "ngắt" và "đóng" điện để chỉ 0 và 1, thì ta có thể hiểu cách toán học xâm nhập vào văn nghệ như thế nào. Dĩ nhiên, toán học còn bất lực trước nhiều hiện tượng, đặc biệt là các hiện tượng về tâm lí, tình cảm. Nhưng toán học vẫn tiến lên. Về lí luận, vẫn phát hiện ra những cấu trúc mới, trong đó có sự đóng góp của Việt Nam, ví dụ như cấu trúc "không gian siêu phi Ơ-clít" mà nét đặc trưng là: "*xa vô tận*" *là tương đối* (nghĩa là nếu điểm A xa vô tận so với các điểm B, C, D, E..., nhưng nó có thể chỉ xa hữu hạn đối với các điểm P, Q, R, S...). Điều đó khác với đặc trưng "*xa vô tận*" *là tuyệt đối* (nghĩa là Nếu A xa vô tận thì nó sẽ xa vô tận đối với bất cứ điểm nào) của các không gian Ơ-clít và phi Ơ-clít. Hiện nay lí thuyết này đã có mô hình trong toán học, chưa có mô hình trong các lĩnh vực khác. Nhưng hai câu:

Hữu duyên thiên lí năng tương ngộ
Vô duyên đối diện bất tương phùng

của cuộc sống đời thường gợi lên viễn cảnh rằng cấu trúc này sẽ có thể có ứng dụng trong tâm lí học vì *đối với khoảng cách tâm lí thì* "*xa vô tận*" *quả là tương đối*. Rất tiếc rằng hiện nay khoảng cách tâm lí chỉ mới định tính, chưa định lượng chính xác toán học được. Nhưng ta có thể hi vọng vì ngày nay, khoa học không những đã thừa nhận mà đã ứng dụng được hiện tượng "ý chí biến thành sức mạnh vật lí"; rất có thể một ngày nào đó, tâm lí học biến thành một thứ siêu vật lí với những hạt siêu vĩ mô nhỏ vô cùng so với các hạt cơ bản hiện nay, hi vọng đến lúc đó, cấu trúc "không gian siêu phi Ơ-clít" sẽ có ứng dụng. Mặt khác, máy tính

điện tử ngày càng cải tiến, nay đã đạt đến tốc độ 1000 tỉ phép tính / giây. Đến khi đó, dù có gặp những tọa độ là những dãy 0 và 1 cực kì dài và phải xử lí cực kì nhiều những tọa độ như vậy thì chẳng có gì khó khăn. Đúng là ước mơ, nhưng rất hiện thực. Đúng là thần tiên, nhưng rất đời thường. Tôi đã đi hơi quá xa, xin trở lại đời thường: "Dạy văn hóa toán học" như vậy có khả thi không? - Nhất định có khó khăn nhưng khó khăn về tâm lí là chính, do "nếp cũ đường mòn" khá ăn sâu, còn dạy cho học sinh biết rằng tam giác cũng là một tứ giác rồi khai thác cho hết cách suy nghĩ đó để học một, biết mười thì về mặt toán học đâu có khó. Trong cuộc chạy đua với các nước, ta đi sau, lại nghèo hơn nhiều. Muốn đuổi kịp họ phải có cái gì độc đáo. Hi vọng rằng trong lĩnh vực giáo dục và toán học, chúng ta sẽ có những cái độc đáo.

Chương bảy

Nên sớm tập dượt nghiên cứu Toán học

Ngày xưa "nghiên cứu toán học" hầu như chỉ dành cho những người có trình độ cao, bắt đầu từ nghiên cứu sinh, còn sinh viên ở những năm cuối bậc Đại học cũng chỉ mới tập dượt thôi. Dĩ nhiên, nếu ta hiểu nghiêm túc yêu cầu của nghiên cứu khoa học là phải bảo đảm ba tính: "khách quan", "chính xác" và "mới đối với loài người" thì cũng phải đến chế độ nghiên cứu sinh, ba yêu cầu đó mới có thể đặt ra một cách nghiêm chỉnh. Nhưng nếu ta hạ thấp ba yêu cầu trên thì ta có thể đưa nghiên cứu toán học vào nhà trường phổ thông với cách gọi khiêm tốn là "tập dượt nghiên cứu toán học". Yêu cầu "khách quan" và "chính xác" chỉ là tương đối, xét trong những điều kiện thực tế của dạy và học (ví dụ chọn mẫu để đo đạc bị hạn chế, máy móc đo đạc cổ lỗ nên đo thiếu chính xác). Yêu cầu "mới" chỉ là "mới" đối với cá nhân người làm nghiên cứu hoặc chỉ là "mới" trong địa phương trường đóng. Mục đích nghiên cứu chính là để giáo dục, còn mục đích phục vụ được tí nào hay tí đó, không có cũng được. Dĩ nhiên, không vì vậy mà làm bừa, làm ẩu và phải cố gắng đạt đến ba tính trên đến mức tối đa trong điều kiện cho phép. Cố gắng tối đa mới có tác dụng giáo dục tư duy khoa học và tác phong công nghiệp.

Cứ xem ví dụ 2 ở chương 5 thì rõ. Các định lí A nói đến trong ví dụ đó chả có gì là mới đối với loài người nhưng học trò học được cách tư duy. Nói như cô giáo thì chỉ mới là xét mặt mâu thuẫn giữa hình thoi và hình bình hành và nếu ta chỉ thấy có mặt đó thì chả còn gì để suy nghĩ thêm. Trong ví dụ đó, một học sinh phổ thông cũng có thể trở nên "nhà ảo thuật" nhờ biết suy nghĩ thêm về "mặt thống nhất" giữa hình thoi và hình bình hành. Đó chính là tư duy biện chứng về sự mâu thuẫn và thống nhất giữa cái chung và cái riêng. Kiến thức có thể có đôi chút mới đối với một bộ phận học sinh nào đó, nhưng về mặt văn hóa toán học thì chắc học sinh nào cũng được nâng cao, chẳng hạn như khi phát hiện ra rằng hai định lí về đường trung bình và đường trung tuyến trong một tam giác lại là "anh em ruột" do cùng một mẹ sinh ra là định lí $\overline{A_2}$. Cặp phạm trù "cái riêng và cái chung" là rất quan trọng. Toán học phát triển dần dần từ cái riêng đi đến cái chung. Phát minh toán học lí thuyết phần lớn là những khái niệm từ cái riêng đến cái chung. Sau đây là một quy trình chín bước để hướng dẫn việc khái quát từ một cái riêng lên thành một hay nhiều cái chung. "Cái" ở đây có thể là một khái niệm, một định lí, một lí thuyết.

Bước 1: Phân tích cái riêng cần mở rộng ra thành các bộ phận của nó ("một quan hệ "đồng quy" cũng coi là một bộ phận). Ví dụ, nếu cái riêng là định lí "ba trung tuyến của một tam giác đồng quy" thì các bộ phận của nó là: "tam giác", "ba trung tuyến" và "đồng quy".

Bước 2: Cố gắng nhìn từng bộ phận theo nhiều cách khác nhau.

Bước 3: Lập các tổ hợp khác nhau về các cách nhìn từng bộ phận, mỗi tổ hợp như vậy sẽ cho một cách nhìn về "cái riêng" mà ta muốn mở rộng.

Bước 4: Mỗi cách nhìn từng bộ phận dễ dàng cho ta một hướng mở rộng về bộ phận đó. Từ đó có thể đề xuất ra nhiều giả thuyết về kết quả mở rộng "cái riêng" đã cho.

Bước 5: Mỗi giả thuyết đó có thể đúng, có thể sai. Nhiều khi bằng trực giác, có thể thấy ngay các giả thuyết sai để bỏ ngay chúng đi.

Bước 6: Với những giả thuyết còn lại, ta làm như sau: mỗi giả thuyết đặc biệt hóa theo nhiều cách khác nhau để có nhiều cái riêng khác nhau của giả thuyết (ngoài cái riêng xuất phát mà ta đương muốn mở rộng). Nếu trong các cái riêng này, có một cái riêng sai thì giả thuyết tương ứng là sai, phải bỏ đi. Nếu tất cả các "cái riêng" đó đều đúng thì ta cũng chưa kết luận được rằng giả thuyết đó là đúng nhưng khả năng "nó là đúng" tăng lên.

Bước 7: Hoàn chỉnh thêm các giả thuyết không bị bác bỏ ở hai bước 5 và 6 bằng cách sử dụng các kết quả ở bước 6. Chẳng hạn, nhờ bước 6 mà ta có thể xác định một hệ số nào đó mà ở các bước trước chưa xác định được.

Bước 8: Chứng minh từng giả thuyết chưa bị bác bỏ qua các bước 5, 6 và được hoàn chỉnh qua bước 7. Các bước 5, 6, 7 có thể soi sáng phần nào phương hướng tìm tòi cách chứng minh từng giả thuyết; có bao nhiêu giả thuyết được chứng minh thì có bấy nhiêu "cái chung" tương ứng với "cái riêng" đã cho. Với những giả thuyết không bị bác bỏ ở các bước 5, 6, 7 nhưng vẫn chưa chứng minh được thì đó là những vấn đề để tiếp tục nghiên cứu.

Bước 9: Nếu tất cả các "cái riêng" ở bước 6 đều bị bác bỏ thì ta vẫn còn hi vọng rằng trong tương lai sẽ có được những cách nhìn mới cho phép việc khái quát "cái riêng" đã cho thu được thắng lợi.

Trong việc "mở rộng" rõ ràng năng lực "nhìn một cái riêng đã cho theo nhiều cách khác nhau là rất quan trọng. Ví dụ, chỉ một điểm A, có thể nhìn theo những cách sau: A là một vòng tròn bán kính bằng không mà phương trình là $x^2 + y^2 = 0$ hay $(y + ix)(y - ix) = 0$ ($i = \sqrt{-1}$). Vậy A còn có thể xem là tập hợp hai đường thẳng $y = \pm ix$, cũng có thể xem là trung điểm của đoạn thẳng AA, thậm chí có thể xem là điểm chia đoạn thẳng AA theo một tỉ lệ tùy ý.

PHỤ LỤC

SÁCH BÁO ĐỂ THAM KHẢO THÊM CỦA TÁC GIẢ NGUYỄN CẢNH TOÀN

1. Sách

[1]. *Tập cho học sinh giỏi toán làm quen dần với nghiên cứu toán học* (NXB Giáo dục 1992, 1997, 1998. NXB Đại học Quốc gia 2003 và có tuyển toàn bộ sách này vào trong [3] và [4].

[2]. *74 câu chuyện học toán thông minh và sáng tạo* (NXB Nghệ An, 2003).

Sách này tuyển 50 bài báo của tác giả đã đăng ở tạp chí *Toán học và tuổi trẻ* và 24 bài đăng ở ngoài tạp chí *Toán học và tuổi trẻ.*

[3]. Tuyển tập. *Tự giáo dục, tự học, tự nghiên cứu* tập I và tập II (NXB Đại học Sư phạm Hà Nội và Trung tâm văn hóa ngôn ngữ Đông Tây 2001).

[4]. *Tuyển tập các công trình về giáo dục và toán học* (NXB Giáo dục, 2005).

[5]. *Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy và nghiên cứu toán học* tập I và tập II (NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 1997).

2. Các bài báo

Ngoài 74 bài báo trong [2] thích hợp với học sinh phổ thông còn có thêm các bài báo sau đây thích hợp với sinh viên.

[6]. *Toán học và triết học*. Tập san Toán Lí số 1 và số 2, 1962

[7]. *Một số ý kiến xung quanh vấn đề giảng dạy toán ở bậc Đại học*. Tập san Toán Lí 4/1964.

[8]. *Học tập triết học duy vật biện chứng để nâng cao sức sáng tạo toán học*. Tin tức hoạt động khoa học số 8/1975.

[9]. *Rèn luyện thế giới quan duy vật biện chứng và nhân sinh quan cộng sản chủ nghĩa qua việc dạy toán và học toán ở bậc Đại học*. (Tạp chí Đại học tháng 5/1976).

[10]. *Say mê toán học trong học tập, giảng dạy và nghiên cứu* (Đặc san Kỉ niệm 20 năm Quốc học Vinh, 12/1990).

[11]. *Từ sữa trâu đến sáng tạo toán học* (Khoa học và đời sống số 52 ngày 29-12-1992).

[12]. *Thế nào là hiện đại trong dạy và học toán?* (Nghiên cứu giáo dục số 10 và số 12/1995).

[13]. *Toán học trong thời đại kinh tế tri thức* (Truyền hình số 37 ngày 13-9-2001).

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc : ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập : ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm về nội dung và bản quyền:
CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH DỊCH VÀ TỪ ĐIỂN GIÁO DỤC

Biên tập nội dung lần đầu : Nguyễn Đặng Trí Tín
Biên tập nội dung tái bản : Nguyễn Ngọc Tú
Trình bày bìa : Nguyễn Mạnh Hùng
Chế bản : Nguyễn Thị Sâm-Nguyễn Thị Bính

NÊN HỌC TOÁN NHƯ THẾ NÀO CHO TỐT?

Mã số: 02.02.928/1181 - PT2012
Số đăng kí KHXB: 78-2012/CXB/928-43/ĐHSP ngày 13/1/2012
In 1000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5cm
In tại: Công ty TNHH In Khuyến học, 102 Hoàng Cầu - Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu quý 2 năm 2012.